

## ГЕОМЕХАНИКА

**УДК 539.3**

**И. И. Петрушева**

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕВОМ НАГРУЖЕНИИ**

Рассматривается задача о динамической устойчивости многослойной цилиндрической оболочки, собранной из нескольких упругих армированных слоёв постоянной толщины. Оболочка нагружена на торцах равномерно распределенным осевым усилием, интенсивность которого следует периодическому закону:

$$T_{ss} \Big|_{s=0,l} = -(P_0 + P_1 \cos \theta t). \quad (1)$$

Здесь  $s$ ,  $\phi$ ,  $z$  – цилиндрические координаты, где  $s$  – длина образующей ( $0 \leq s \leq l$ ),  $\phi$  – угловая координата ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ),  $z$  – поперечная координата, отсчитываемая от внутренней поверхности. Оболочку считаем ортотропной, причем оси ортотропии (армирования) направлены вдоль координатных линий.

Возникающие под действием нагрузления (1) вынужденные осесимметричные колебания при определенных сочетаниях параметров  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $\theta$  могут оказаться неустойчивыми в смысле Ляпунова [3-8]. Ниже строятся области динамической неустойчивости и исследуются их характеристики.

Решение поставленной задачи проводится на основе линеаризованной системы уравнений динамической устойчивости неклассической теории оболочек [1] в предположении, что докритическими деформациями допустимо пренебречь. Этую систему составляют следующие группы зависимостей [1, 2] ( $k = 1, \dots, m$  – порядковый номер слоя):

- соотношения упругости:

$$\sigma_{ss}^{(k)} = a_{11}^{(k)} \varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = a_{12}^{(k)} \varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)},$$

$$\sigma_{s\varphi}^{(k)} = \sigma_{\varphi s}^{(k)} = a_{33}^{(k)} \varepsilon_{s\varphi}^{(k)},$$

$$\tau_{sz}^{(k)} = G_{13}^{(k)} \gamma_{sz}^{(k)}, \quad \tau_{\varphi z}^{(k)} = G_{23}^{(k)} \gamma_{\varphi z}^{(k)},$$

- закон распределения вариаций физических составляющих вектора перемещения по толщине пакета слоёв:

$$v_s^{(k)} = u_s - z \frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)} \pi_s, \quad (3)$$

$$v_\varphi^{(k)} = u_\varphi - \frac{z}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi, \quad v_z^{(k)} = w,$$

- соотношения деформации–перемещения:

$$\gamma_{sz}^{(k)} = \frac{f'(z) \cdot \pi_s}{G_{13}^{(k)}}, \quad \gamma_{\varphi z}^{(k)} = \frac{f'(z) \cdot \pi_\varphi}{G_{23}^{(k)}}, \quad \varepsilon_{zz}^{(k)} = 0,$$

$$\varepsilon_{ss}^{(k)} = \frac{\partial u_s}{\partial s} - z \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \mu_{11}^{(k)} \frac{\partial \pi_s}{\partial s}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - z \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} + w \right),$$

$$2\varepsilon_{x\varphi}^{(k)} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} - 2 \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial s} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_s}{\partial \varphi} \right);$$

- выражение вариаций физических составляющих обобщённых усилий и моментов оболочки через вариации компонент тензора напряжений в её слоях:

$$[T_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} [1, z, \mu_{\beta\beta}^{(k)}] dz,$$

$$[T_{sz}, T_{\varphi z}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\tau_{sz}^{(k)}, \tau_{\varphi z}^{(k)}] dz, \quad (5)$$

$$[\mathcal{Q}_s, \mathcal{Q}_\varphi] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} f'(z) \left[ \frac{\tau_{xz}^{(k)}}{G_{13}^{(k)}}, \frac{\tau_{\varphi z}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}} \right] dz.$$

- вариации далаамберовых сил инерции:

$$[\ddot{X}_\alpha, \ddot{Y}_\alpha, \ddot{Z}_\alpha] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k \ddot{v}_\alpha^{(k)} [1, z, \mu_{\alpha\alpha}^{(k)}] dz, \quad (6)$$

$$\ddot{I} = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k \ddot{w} dz;$$

- уравнения движения элемента оболочки:

$$\frac{\partial T_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} = \ddot{X}_s, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{s\varphi}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{T}_{\varphi\varphi}}{R^2} \left( u_\varphi - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= \ddot{X}_\varphi, \\ \frac{T_{\varphi\varphi}}{R} - \frac{\partial^2 M_{ss}}{\partial s^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{s\varphi}}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} - \\ - \left( \tilde{T}_{ss} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\tilde{T}_{\varphi\varphi}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( u_\varphi - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right) + \\ + \ddot{I} + \frac{\partial \ddot{Y}_s}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{Y}_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial S_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - Q_s &= \ddot{Z}_s, \\ \frac{\partial S_{s\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - Q_\varphi &= \ddot{Z}_\varphi. \end{aligned}$$

Функциональные параметры  $f(z)$  и  $\mu_{\alpha\alpha}$  приняты в виде [1, 2]. Система (2)–(7), записанная в вариациях обобщенных перемещений  $w$ ,  $u_s$ ,  $u_\varphi$ ,  $\pi_s$ ,  $\pi_\varphi$ , – система 12-го порядка, состоящая из пяти дифференциальных уравнений. Она замыкается соответствующим числом краевых условий [1]. В рассматриваемом здесь случае свободного опищения краев цилиндрической оболочки эти условия при  $s = 0$ ,  $s = l$  записываем в виде:

$$w = u_\varphi = \pi_\varphi = T_{ss} = M_{ss} = S_{ss} = 0. \quad (8)$$

Также, в силу замкнутости контура оболочки, требуем выполнения условия  $2\pi$ -периодичности по угловой координате  $\varphi$ .

Запишем систему в векторно-матричной форме. Для этого введем безразмерные переменные ( $l$  – длина,  $h$  – толщина,  $R$  – радиус оболочки):

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T = \\ &= (w/h, u_s/R, u_\varphi/R, \pi_s h^3/E_1^c R, \pi_\varphi h^3/E_1^c R)^T, \\ x &= s/l, \bar{\rho}_k = R^2 \rho_k / E_1^c, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{T}_{xx} = h E_1^c t_{xx}, \tilde{T}_{\varphi\varphi} = h E_1^c t_{\varphi\varphi}.$$

Здесь  $E_1^c$  – модуль Юнга материала связующего первого слоя оболочки;  $\tilde{T}_{xx}, \tilde{T}_{\varphi\varphi}$  – размерные, а  $t_{xx}, t_{\varphi\varphi}$  – безразмерные обобщенные усилия основного состояния. В безразмерных переменных (9) краевая задача (2)–(8) принимает вид:

$$A(D_x, D_\varphi) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left( \begin{array}{l} B(D_x, D_\varphi) + \\ + C(D_x, D_\varphi, t_{xx}, t_{\varphi\varphi}) \end{array} \right) y = 0,$$

$$\begin{aligned} y_i(0, \varphi, t) &= y_i(1, \varphi, t) = 0; \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0; \\ \frac{\partial y_j}{\partial x} &= 0; i = 1, 3, 5; j = 2, 4. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $A, B, C$  – матрицы  $5 \times 5$ , элементы которых – полиномы от дифференциальных операторов  $D_x = \partial/\partial x$  и  $D_\varphi = \partial/\partial \varphi$  с постоянными коэффициентами. Приведем выражения для элементов перечисленных матриц, введя безразмерные параметры и принимая следующие обозначения ( $z = h_i$  – уравнение поверхности раздела  $(i-1)$ -го и  $i$ -го слоев):

$$\begin{aligned} \delta &= l/R, \gamma = R/h, \beta_i = h_i/h, i = 0, \dots, m, \\ s_k &= E_k^c / E_1^c, a_{ij}^{(k)} = E_k^c b_{ij}^{(k)}, G_{i3}^{(k)} = E_k^c d_{i1}^{(k)}, \\ t_{ik} &= \frac{1}{i+1} (\beta_k^{i+1} - \beta_{k-1}^{i+1}) \lambda_{il} = 0, \\ \lambda_{i,k+1} &= \lambda_{ik} + \\ &+ (\beta_k^3 - 1,5 \beta_k^2) \left( (s_k d_{i1}^{(k)})^{-1} - (s_{k+1} d_{i1}^{(k+1)})^{-1} \right), \\ r_{\alpha\beta k} &= \frac{t_{6k} - 3t_{5k} + 2,25t_{4k}}{s_k^2 d_{\alpha 1}^{(k)} d_{\beta 1}^{(k)}} + \\ &+ (t_{3k} - 1,5t_{2k}) \left( \frac{\lambda_{\alpha k}}{s_k d_{\beta 1}^{(k)}} + \frac{\lambda_{\beta k}}{s_k d_{\alpha 1}^{(k)}} \right) + \lambda_{\alpha k} \lambda_{\beta k} t_{0k}, \\ \bar{r}_{\alpha j k} &= (t_{3+j,k} - 1,5t_{2+j,k}) (s_k d_{\alpha 1}^{(k)})^{-1} + \lambda_{\alpha k} t_{jk}. \end{aligned}$$

Выражения для ненулевых элементов  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  матриц  $A, B, C$  таковы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \gamma^2 \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k} \frac{\partial}{\partial x}, \quad a_{12} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k}, \\ a_{14} &= -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k r_{10k}, \\ a_{21} &= \gamma^2 \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad a_{32} = -(\delta/\gamma^2) a_{11}, \\ a_{35} &= -\delta^2 \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k r_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad a_{33} = -(\delta/\gamma)^2 a_{21}, \\ a_{33} &= -(\delta/\gamma)^2 a_{21}, \\ a_{31} &= \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \left[ \gamma^2 t_{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - \delta^2 t_{0k} \right], \\ a_{34} &= -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k r_{11k} \frac{\partial}{\partial x}, \quad a_{23} = a_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{25} &= -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{20k}, \quad a_{41} = -(\gamma^2/\delta) a_{34}, \\
a_{42} &= a_{14}, \quad a_{44} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{11k}, \\
a_{53} &= a_{25}, \quad a_{51} = -(\gamma/\delta)^2 a_{35}, \\
a_{55} &= -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{22k}; \\
b_{51} &= -(\gamma^2/\delta) b_{35}, \quad b_{52} = b_{15}, \quad b_{53} = b_{25}, \\
b_{11} &= \frac{\gamma^2}{\delta^2} \sum_{k=1}^m s_k \left[ \begin{array}{c} \frac{\delta^2}{\gamma} b_{12}^{(k)} t_{0k} - t_{1k} \times \\ \times \left( b_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 \times \right. \\ \left. \times \left( b_{12}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial x}, \\
b_{13} &= \frac{\gamma^2}{\delta^2} \sum_{k=1}^m s_k t_{0k} \left[ b_{12}^{(k)} + b_{33}^{(k)} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \\
b_{12} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k t_{0k} \left[ b_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \\
b_{14} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k \bar{r}_{10k} \left[ b_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \\
b_{15} &= \sum_{k=1}^m s_k \bar{r}_{20k} \left[ b_{12}^{(k)} + b_{33}^{(k)} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \\
b_{21} &= \frac{\gamma^2}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k \left[ \begin{array}{c} \frac{\delta^2}{\gamma} b_{22}^{(k)} t_{0k} - t_{1k} \times \\ \times \left( \left( b_{12}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{22} &= b_{13}, \quad b_{54} = b_{45}, \quad b_{42} = b_{14}, \quad b_{43} = b_{24}, \\
b_{24} &= \sum_{k=1}^m s_k \bar{r}_{10k} \left[ b_{12}^{(k)} + b_{33}^{(k)} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \\
b_{23} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k t_{0k} \left[ b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \\
b_{25} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k \bar{r}_{20k} \left[ b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{45} &= \sum_{k=1}^m s_k r_{12k} \left[ b_{12}^{(k)} + b_{33}^{(k)} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \\
b_{32} &= -\frac{\delta}{\gamma^2} b_{11}, \quad b_{33} = -\frac{\delta}{\gamma^2} b_{21}, \\
b_{31} &= \sum_{k=1}^m s_k \left[ -\frac{\gamma^2}{\delta^2} t_{2k} \left[ \begin{array}{c} b_{11}^{(k)} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\delta^2 \left( b_{12}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)} \right) \times \\ \times \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \delta^4 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} - \\ - \delta^2 b_{22}^{(k)} t_{0k} + 2\eta_{1k} \times \\ \times \left( b_{12}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \end{array} \right] \right] \\
b_{34} &= -\frac{\delta}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k \left[ \begin{array}{c} b_{12}^{(k)} \bar{r}_{10k} - \frac{1}{\delta^2} \bar{r}_{11k} \times \\ \left( b_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 \left( b_{12}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial x}, \\
b_{35} &= -\sum_{k=1}^m s_k \left[ \begin{array}{c} \frac{\delta^2}{\gamma} b_{22}^{(k)} \bar{r}_{20k} - \bar{r}_{21k} \times \\ \left( \left( b_{12}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{44} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k r_{11k} \left[ b_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \\
&\quad - \frac{\delta(\alpha+1)^2}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{2\alpha,k} - 2t_{2\alpha-1,k} + t_{2\alpha-2,k}}{s_k d_{11}^{(k)}}, \\
b_{55} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k r_{22k} \left[ b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \\
&\quad - \frac{\delta(\alpha+1)^2}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{2\alpha,k} - 2t_{2\alpha-1,k} + t_{2\alpha-2,k}}{s_k d_{21}^{(k)}}, \\
c_{21} &= \delta \eta_{\varphi\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad c_{23} = -\delta \eta_{\varphi\varphi}, \\
c_{31} &= t_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 t_{\varphi\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad c_{33} = -\frac{\delta^2}{\gamma} t_{\varphi\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

Отметим, что уравнения классической теории могут быть получены из системы (10) вычёркиванием из матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  строк и столбцов с номерами 4, 5 [1, 2]. Таким образом, классическая система динамической устойчивости цилиндрической оболочки – это система трех уравнений 8 порядка.

Элементы параметрической матрицы  $C$  зависят от безразмерных усилий основного (невозму-

щенного) состояния  $t_{xx}$ ,  $t_{\phi\phi}$ . Определение этих величин требует решения задачи осесимметричных колебаний. Следуя работе [3], невозмущенное состояние определяем из системы безмоментных динамических уравнений. Соответствующие уравнения можно получить из системы динамических уравнений классической [3], либо неклассической [1] теории в предположении, что моментностью состояния можно пренебречь, и имеют вид:

$$\frac{\partial T_{ss}}{\partial s} = \ddot{X}_s, \quad \frac{T_{\phi\phi}}{R} + \ddot{I} = 0,$$

$$[\ddot{X}_s, \ddot{I}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k [\ddot{u}_s, \ddot{w}] dz. \quad (11)$$

Используя переменные (9), а также вводя новые обозначения

$$\tilde{y}(x, t) = (w/h, u_x/R)^T; \quad (12)$$

$$\lambda^2 = \frac{\theta^2 \delta^2 a(b_2 - a\theta^2)}{b_1(b_2 - a\theta^2) - b^2}; \quad P_i = hE_1^c \lambda_i, i = 0, 1$$

$$b = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{0k}, \quad b_1 = \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{0k},$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{0k}, \quad a = \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k},$$

систему (11) записываем в виде:

$$\tilde{A} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} + \tilde{B}(D_x) \cdot \tilde{y} = 0, \quad (13)$$

$$t_{xx}|_{x=0} = t_{xx}|_{x=1} = -(\lambda_0 + \lambda_1 \cos \theta t),$$

$$t_{xx} = \gamma b \tilde{y}_1 + \frac{1}{\delta} b_1 \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial x}.$$

Здесь  $\tilde{A}, \tilde{B}$  – матрицы  $2 \times 2$  соответственно.

Ненулевые элементы матриц:

$$a_{12} = -\delta a, \quad a_{21} = -\frac{\gamma}{\delta} a_{12},$$

$$b_{11} = \gamma b \frac{\partial}{\partial x}, \quad b_{12} = \frac{b_1}{\delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad b_{21} = \gamma b_2, \quad b_{22} = \frac{b}{\delta} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Решение задачи (13) ищем в форме (1):

$$\tilde{y}(x, t) = U(x) + V(x) \cos \theta t. \quad (14)$$

Подстановкой (14) в (13) и интегрированием системы, распавшейся относительно вектор-функций  $U(x)$  и  $V(x)$ , определяем характеристики основного состояния:

$$\tilde{y}_1(x, t) = \frac{b \cdot \lambda_0}{\gamma(b_1 b_2 - b^2)} + \frac{b \cdot \lambda_1 \cos \theta t}{\gamma(b_1(b_2 - a\theta^2) - b^2)} \times$$

$$\times \left( \frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} \sin \lambda x + \cos \lambda x \right),$$

$$\tilde{y}_2(x, t) = \frac{\delta b_2(c - x) \cdot \lambda_0}{(b_1 b_2 - b^2)} + \frac{\sqrt{b_2 - a\theta^2} \cdot \lambda_1 \cos \theta t}{\theta \sqrt{a(b_1(b_2 - a\theta^2) - b^2)}} \times$$

$$\times \left( \frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} \cos \lambda x - \sin \lambda x \right),$$

$$t_{xx}(x, t) = \tilde{T}_{xx}/hE_1^c = -\lambda_0 -$$

$$-\left( \frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} \sin \lambda x + \cos \lambda x \right) \cdot \lambda_1 \cos \theta t,$$

$$t_{\phi\phi}(x, t) = \tilde{T}_{\phi\phi}/hE_1^c = \frac{ba\theta^2}{b_1(b_2 - a\theta^2) - b^2} \times$$

$$\times \left( \frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} \sin \lambda x + \cos \lambda x \right) \cdot \lambda_1 \cos \theta t.$$

Полученное решение согласуется с результатом, приведенным в [3]. Во многих случаях (в диапазоне частот  $\theta^2 \ll b_2/a \sim 10^6$ ) (см. [3, 4]), можно пренебречь неоднородностью основного состояния по пространственной переменной  $x$  и привести безразмерные усилия к виду:

$$t_{xx}(x, t) \cong -\lambda_0 - \lambda_1 \cos \theta t,$$

$$t_{\phi\phi}(x, t) \cong \frac{ba\theta^2}{b_1(b_2 - a\theta^2) - b^2} \cdot \lambda_1 \cos \theta t$$

$$\ll \lambda_1 \cos \theta t.$$

В силу этой оценки, амплитуда окружного усилия  $t_{\phi\phi}$  много меньше амплитуды продольного усилия  $t_{xx}$ , что позволяет, в дальнейшем, пренебречь этой величиной.

Возвращаемся к системе (10) и строим ее решение в виде рядов Фурье ( $i = 2, 4$ ):

$$y_1(x, \varphi, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} y_{mn}^1(t) \sin(\pi m x) \cos(n\varphi),$$

$$y_i(x, \varphi, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} y_{mn}^i(t) \cos(\pi m x) \cos(n\varphi),$$

$$y_{i+1}(x, \varphi, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} y_{mn}^{i+1}(t) \sin(\pi m x) \sin(n\varphi). \quad (15)$$

Представления (15) позволяют отдельить пространственные переменные  $x, \varphi$  в задаче (10) и удовлетворить ее краевым условиям. В результате получаем последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений, распадающихся по индексам  $m$  и  $n$ :

$$A_{mn} \frac{d^2 y_{mn}}{dt^2} + (B_{mn} - (\lambda_0 + \lambda_1 \cos \theta t) C_{mn}) y_{mn} = 0, \quad (16)$$

где  $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}$  – матрицы  $5 \times 5$ , с постоянными коэффициентами, элементы которых несложно получить из соответствующих элементов матриц

*A, B, C.* Отметим некоторые предельные формы системы (16).

1. Полагая  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$  и выполняя переход  $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$ , получаем систему

$$(B_{mn} - \omega^2 A_{mn}) \cdot y_{mn} = 0,$$

решения которой определяют спектр собственных частот  $\omega$  и форм собственных колебаний оболочки. Эффективный метод решения этой задачи приведен в [1] и реализован автором в [2, 10].

2. Полагая  $\lambda_1 = 0$  и принимая  $\partial^2/\partial t^2 = 0$ , получаем систему

$$(B_{mn} - \lambda^* C_{mn}) \cdot y_{mn} = 0,$$

решения которой формируют спектр статических критических усилий  $\lambda^*$  и форм потери устойчивости [1, 4].

Возвращаясь к (16), видим, что задача динамической неустойчивости состояния (14) сведена к исследованию устойчивости тривиального решения матричного уравнения Маттье (16). Следуя методике, изложенной в [4, 5], ищем решения периодов  $T$  и  $2T$ , где  $T = 2\pi/\theta$  – период возмущающей нагрузки. Такие решения представляем в виде тригонометрического ряда Фурье с векторными коэффициентами:

$$y_{mn}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_k^{mn} \cos \frac{\theta k t}{2} + b_k^{mn} \sin \frac{\theta k t}{2} \right). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и приравнивая к нулю общие члены каждого из четырех полученных рядов Фурье, приходим к четырем бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Условие существования нетривиального решения этих систем заключается в равенстве нулю определителей, составленных из их коэффициентов. Так получаем бесконечные определители Хилла [4, 5]:

$$\det(\Lambda_i^{mn} - \theta^2 \Omega_i^{mn}) = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (18)$$

где  $i = 1, 2$  соответствуют нечетным  $k$  (решения периода  $2T$ );  $i = 3, 4$  – четным  $k$  (решения периода  $T$ ); матрицы  $\Lambda$ ,  $\Omega$  имеют блочную трехдиагональную структуру, элементами которой служат  $5 \times 5$  матрицы:

$$\Lambda_i^{mn} = \begin{pmatrix} B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} + g_i^{mn} & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & 0 & \dots \\ -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & \dots \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{1,2}^{mn} = \frac{1}{4} \text{diag}((2i-1)^2 A_{mn})_{i=1}^{\infty}, \quad (19)$$

$$\Omega_{3,4}^{mn} = \text{diag}(i^2 A_{mn})_{i=1}^{\infty},$$

где

$$\begin{aligned} g_{1,2}^{mn} &= \pm \frac{\lambda_1}{2} C_{mn}, g_3^{mn} = \\ &- \frac{\lambda_1}{2} C_{mn} (B_{mn} - \lambda_0 C_{mn})^{-1} \frac{\lambda_1}{2} C_{mn}, g_4^{mn} = 0. \end{aligned}$$

Анализ уравнения (18), с учетом (19), показывает, что задача определения границ областей динамической неустойчивости системы (16) в пространстве параметров  $(\theta, \lambda_0, \lambda_1)$  сводится к решению обобщенной проблемы собственных значений. Численное исследование этой задачи осуществлялось методом редукции [9]. Согласно этому методу решение строится как предел последовательности конечномерных задач порядка  $5N$ , при  $N \rightarrow \infty$ . Критерием завершения процесса служит стабилизация расчетных значений исследуемого участка спектра. Вычисления показали, что для определения первых четырех областей достаточно положить  $N = 6$ .

Следует отметить, что, пренебрегая в системе (16) инерцией вращения и инерцией поперечных сдвигов, получаем одно дифференциальное уравнение Маттье вида:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{a} (b - (\lambda_0 + \lambda_1 \cos \theta t) c) y = 0, \quad (20)$$

$$a, b, c = \text{const} > 0,$$

$$\omega^2 = b/a, \lambda^* = b/c. \quad (21)$$

Вводя параметры  $(\lambda_0^*, \lambda_1^*) = (\lambda_0/\lambda^*, \lambda_1/\lambda^*)$ ,  $0 \leq \lambda_0^*, \lambda_1^* < 1$ , и учитывая (21), уравнение (20) переписываем в форме:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 \left( 1 - (\lambda_0^* + \lambda_1^* \cos \theta t) \right) y = 0. \quad (22)$$

Для сравнения полученных в работе результатов с уже известными [3, 4], приведем приближенные формулы Болотина [3, 4] для уравнения Маттье (22), установленные им в рамках классической теории:

главная область:

$$2\sqrt{1 - \lambda_0^* - 0.5\lambda_1^*} < \frac{\theta}{\omega} < 2\sqrt{1 - \lambda_0^* + 0.5\lambda_1^*}; \quad (23.1)$$

вторая область:

$$\sqrt{1 - \lambda_0^* - \frac{(\lambda_1^*)^2}{2(1-\lambda_0^*)}} < \frac{\theta}{\omega} < \sqrt{1 - \lambda_0^* + \frac{(\lambda_1^*)^2}{12(1-\lambda_0^*)}}; \quad (23.2)$$

третья область:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \sqrt{1 - \lambda_0^* - \frac{9(\lambda_1^*)^2}{32(1-\lambda_0^*)-18\lambda_1^*}} &< \\ &< \frac{\theta}{\omega} < \frac{2}{3} \sqrt{1 - \lambda_0^* - \frac{9(\lambda_1^*)^2}{32(1-\lambda_0^*)+18\lambda_1^*}}. \end{aligned} \quad (23.3)$$

Ниже представлены некоторые результаты численных расчетов, проведенных в следующих случаях:

(а) в рамках неклассической теории с учетом всех инерционных слагаемых по формулам (18) для системы (16);

(б) в рамках классической теории с учетом всех инерционных слагаемых по формулам (18) для системы (16);

(в) в рамках неклассической теории с учетом лишь инерции прогиба по формулам (18) для уравнения (22);

(г) с использованием формул (23).

Области неустойчивости построены на плоскости параметров  $(\lambda_1, \theta)$  при фиксированном  $\lambda_0$ . Рассчитывалось отношение площадей: площади, занимаемой областью неустойчивости, к площади прямоугольника, определяемого координатными осями и правой верхней граничной точкой главной области неустойчивости. Расчеты проводились для трехслойной композитной оболочки, первый и третий слои которой армированы либо в окружном направлении (1a), либо в меридиональном (2a), а второй – изотропный. Использовалась структурная модель армированного слоя [1–2]. Принимались следующие параметры

геометрические:

$$l = 1m, R/h = 20, l/R = 2, \\ h_1 - h_0 = h_3 - h_2 = 0.3h, h_2 - h_1 = 0.4h; \quad (24)$$

механические ( $k = 1, 3$ ):

$$E_k^c = E_2 = 3000 \text{ MPa}, E_k^a = 250 \text{ GPa},$$

$$\nu_2 = \nu_k^c = \nu_k^a = 0.3;$$

$$\rho_k^c = \rho_2 = 1250 \text{ kg/m}^3, \rho_k^a = 1710 \text{ kg/m}^3;$$

структурные:

$$w_1 = w_3 = w_{z1} = w_{z3} = 0.5.$$

Первая группа результатов отражает исследование погрешности, вносимой неучетом поперечных сдвиговых деформаций при построении первых трех областей динамической неустойчивости (расчет по типу (а) и (б)). Варьировались параметры  $R/h$ ,  $l/R$ ,  $h_k/h$ , а также тип армирования. Можно утверждать, что для оболочек с характеристиками  $R/h > 10$ ,  $l/R > 2$  в подавляющем большинстве случаев погрешность составляет менее 1–2%. Несмотря на это, расположение областей, вычисленных с учетом и без учета сдвига, отличается на процент, определяемый погрешностью вычисления низшей собственной частоты (соответствующие результаты [2, 10]). На рис. 1 изображены

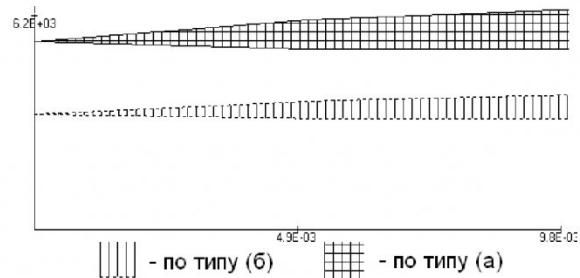


Рис. 2 Главная область для оболочки армированной по типу (1a)

первые три области на плоскости  $(\lambda_0 = 0, \lambda_1, \theta)$ . Слои армированы по типу (1a). Погрешность при расчете низшей собственной частоты составила 40%, погрешность при вычислении площади области неустойчивости составила менее 1%. Коэф-

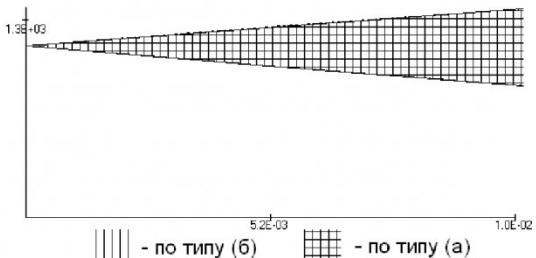


Рис.3 Главная область для оболочки армированной по типу (2a)

фициенты волнообразования, определяющие интенсивность критической статической нагрузки  $\lambda^*$ , для классической модели составили  $n = 3$ ,  $m = 3$ , для неклассической –  $n = 4$ ,  $m = 5$ .

При изменении типа армирования наблюдается уменьшение площади, занимаемой областями. Причем эта разница сохраняется на всех плоскостях  $\lambda_0$ . На рис. 2, 3 представлены главные области неустойчивости, выстроенные на плоскости  $\lambda_0 = 0.8\lambda^*$  для оболочки с характеристиками (24) при армировании по типу (1a) и (2a) соответственно. Занимаемая площадь в первом случае составляет 27%, во втором – 44%; погрешность при вычислении низшей собственной частоты 40% (1a) и 0.4% ((2a), области совпали).

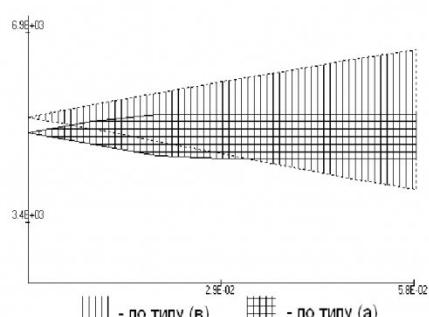


Рис. 4. Главная область, выстроенная при  $R/h = 10$ ,  $l/R = 1$ , толщины (24)

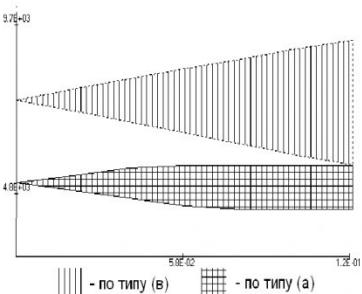


Рис. 5. Главная область, выстроенная при  $R/h = 10, l/R = 15$

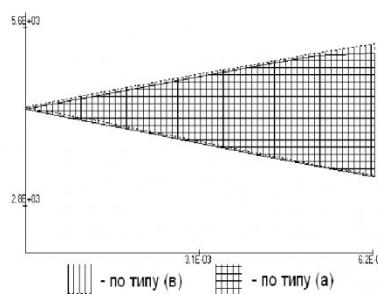


Рис. 6. Главная область, выстроенная при  $R/h = 100, l/R = 1$

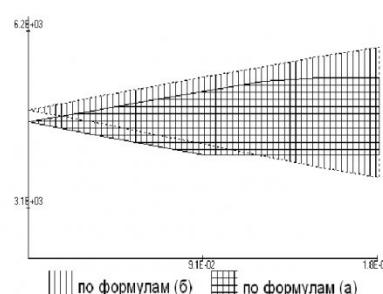


Рис. 7. Главная область, выстроенная при  $R/h = 10, l/R = 1$ , толщины (25)

Вторая группа результатов представлена на рис. 4–7. Здесь исследовалась погрешность, вносимая неучетом части инерционных слагаемых (расчеты по типу (а) и (в)). Результаты показали, что погрешность расчета площадей возрастает при уменьшении параметров  $R/h$  и  $l/R$ , достигая 50%. На рис. 4–6 представлена главная область на плоскости  $\lambda_0 = 0.4\lambda^*$ . Соответствующие погрешности 40% при  $R/h = 10, l/R = 1$ ; 20% при  $R/h = 10, l/R = 15$ ; менее 1% при  $R/h = 100, l/R = 1$  (области совпали).

Возрастание погрешности выявлено также при варьировании толщин слоев оболочки. Так, например, при характеристиках  $R/h = 10, l/R = 1$  переход от (24) к

$h_1 - h_0 = h_3 - h_2 = 0.1h, h_2 - h_1 = 0.8h \quad (25)$  дает уменьшение погрешности с 40% до 5%. (рис. 4, 7).

Третья группа результатов содержит выводы, сделанные при сравнении областей, выстроенных

для уравнения Матье (расчет по типу (в) и (г)). Отметим общие тенденции

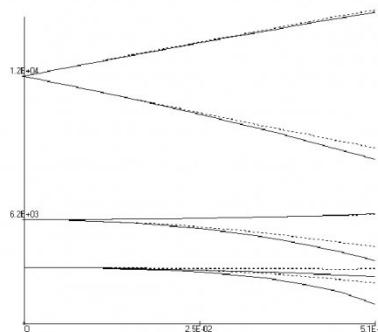


Рис. 8 Границы областей при  $\lambda_0 = 0$ , ---- (в) — (с)

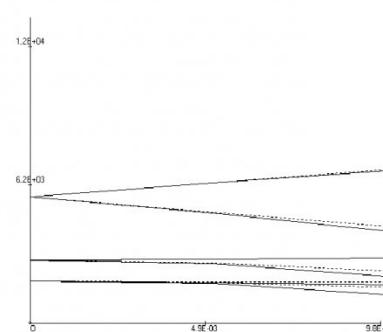


Рис. 9 Границы областей при  $\lambda_0 = 0.8\lambda^*$ , ---- (в) — (с)

1. На плоскости  $\lambda_0 = 0$  погрешности при определении площадей первых трех областей - около 5, 30 и 50% соответственно ( $\pm 2-3\%$ ).

2. С ростом амплитуды статической нагрузки погрешность расчета главной области уменьшается до 1–3%, для второй области сохраняется на уровне 25–35%, для третьей растет до 70–100%.

3. Погрешность при вычислении площади всей области неустойчивости на плоскостях  $\lambda_0 = \text{const}$  изменяется в пределах  $\pm 1-2\%$ .

На рис. 8, 9 изображены границы первых трех областей на плоскостях  $\lambda_0 = 0$  и  $\lambda_0 = 0.8\lambda^*$  соответственно. Характеристики оболочки (24). Погрешности составляют в первом случае 5%, 28%, 50% (суммарная 10%), во втором случае – 3.5%, 35%, 70% (суммарная 11%).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания //Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.
2. Петрушева И.И. Свободные колебания упругой многослойной цилиндрической оболочки //Вестн.КузГТУ, 2003. №3. С. 8–17.
3. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики

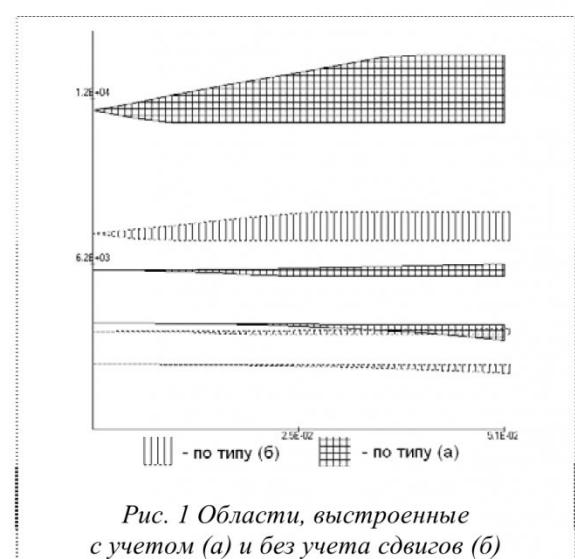


Рис. 1 Области, выстроенные с учетом (а) и без учета сдвигов (б)

10. Петрушева И.И. Свободные колебания слоистой упругой цилиндрической оболочки. //Труды XVIII Межресп. конф. Кемерово, 1-3 июля 2003 / Под ред. В. М. Фомина. Новосибирск, 2003. С. 140–145.

□Автор статьи:

Петрушева

Ирина Ивановна

- старший преподаватель каф. прикладной математики

УДК 622.241.54

Н. В. Черданцев, В.Ю. Изаксон

## УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРАБОТКИ КВАДРАТНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ПРОЙДЕННОЙ В МАССИВЕ ОСАДОЧНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД В ПОЛЕ ТЕКТОНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Задача об устойчивости породных обнажений в окрестности горной выработки, а также задача об устойчивости самой выработки являются основными при её проектировании и сооружении. Выработка считается устойчивой, если за ее контуром не образуются зоны нарушения сплошности окружающего массива. Зоны нарушения сплошности – области, в которых при упругом распределении напряжений, происходят разрушения сдвигом или отрывом по наименее прочным направлениям породного массива, называемых поверхностями ослабления, наличие которых в массиве осадочных горных пород связано с его генезисом. Обычно расчеты напряженного состояния массива горных пород производятся при вертикальных и горизонтальных напряжениях на бесконечности. Если выработка проходится в зоне влияния тектонических воздействий, то следует рассчитывать

напряжения и деформации при произвольном направлении главных напряжений на бесконечности и величинах не равных  $\gamma H$ .

Следовательно, для оценки устойчивости горной выработки необходимо знать напряженное состояние в ее окрестности. Поскольку породный массив в окрестностях протяженных горных выработок находится в состоянии плоской деформации, то задача о напряженном состоянии в их окрестности формулируется следующим образом [1]: в бесконечной невесомой прямоугольной пластине, стороны которой нагружены напряжениями

$$\sigma_{11}^{\infty} = \eta \gamma H, \sigma_{22}^{\infty} = \lambda \eta \gamma H, \sigma_{33}^{\infty} = \lambda \eta \gamma H$$

и повёрнуты к горизонту на угол  $\xi$ , сооружается выработка произвольного сечения (рис. 1). Здесь  $\eta, \lambda$  коэффициенты, в общем случае отличные от

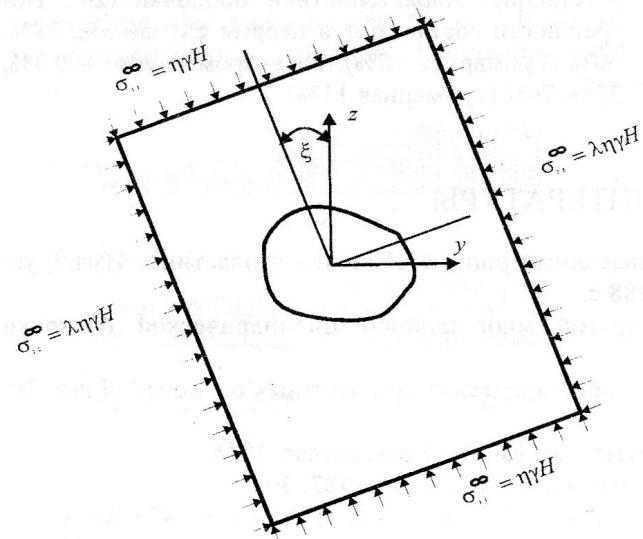


Рис. 1. Расчётная схема задачи

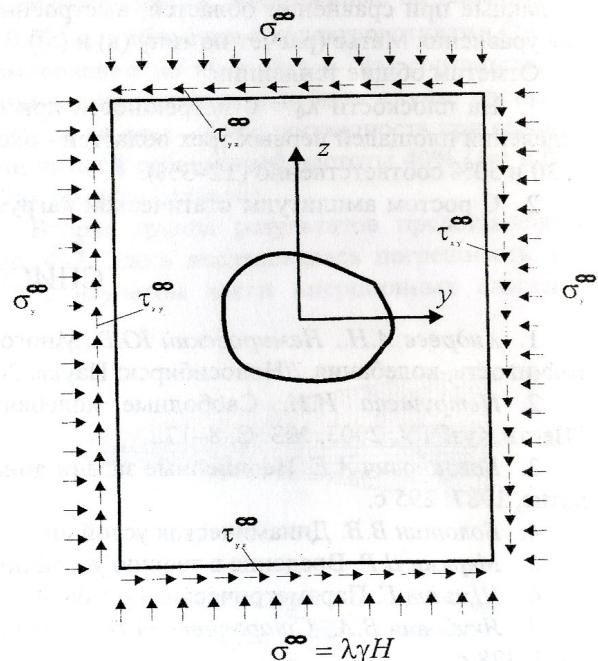


Рис. 2. Стороны бесконечной пластины, ориентированные горизонтально и вертикально