

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**УДК 531.8:621.8**

**Д.М.Кобылянский, В.Ф.Горбунов, В.А.Гоголин**

### **СОВМЕСТИМОСТЬ ВРАЩЕНИЯ И КОЛЕБАНИЙ ТЕЛ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ**

Рассмотрим плоское тело Т, на которое наложены три идеальные связи, препятствующие только перемещениям тела по всем направлениям, как показано на рис.1а. Связями являются точки А, В, С, расположенные в вершинах равностороннего треугольника. Выбрав систему координат так, чтобы ее центр совпадал с центром треугольника и был совмещен с ним (рис.1а), имеем координаты связей: А(0;R), В( $R\sqrt{3}/2$ ; - $R/2$ ), С(- $R\sqrt{3}/2$ ; - $R/2$ ), где R есть расстояние от центра треугольника до его вершин, то есть радиус окружности проходящей через точки А, В, С. В таком положении тело будет иметь одну степень свободы, только в том случае, если нормали к ее границе в точках А, В, С пересекаются в одной точке, которая будет мгновенным центром скоростей. В противном случае число степеней свободы тела равно нулю и оно не может не только поступательно перемещаться, но и совершать вращательное движение. Когда тело имеет одну степень свободы, оно может начать вращение с мгновенным центром вращения в точке пересечения указанных выше нормалей. Пусть эта точка будет началом координат, точкой О. Если мгновенный центр вращения не изменяет своего положения, то единственная форма тела Т - круг радиуса R с центром в точке О.

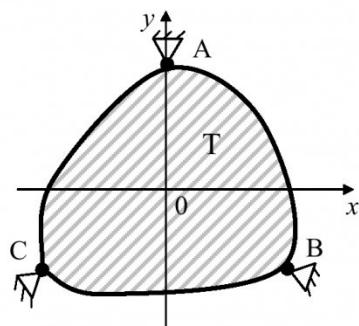
Возникает задача – существуют ли другие формы тела, позволяющие ему вращаться относительно некоторого подвижного центра так, чтобы гра-

ница тела непрерывно проходила через три точки А, В, С без нарушения этих связей? В известной нам литературе такая задача не рассматривалась и по-видимому решается впервые.

Для решения этой задачи рассмотрим сначала движение треугольника АВС как жесткого тела, относительно системы координат  $X_1O_1Y_1$ , связанной с телом Т (рис.1б). Тогда, если движение треугольника происходит так, что его вершины непрерывно остаются на границе тела при полном повороте треугольника на  $360^\circ$ , то и обратно тело будет совершать требуемое движение относительно неподвижного треугольника АВС и связанной с ним системы координат  $XOY$ .

Движение треугольника АВС зададим как поворот относительно центра О и перемещения центра О по оси  $O_1X_1$  на  $f(t)$ , по оси  $O_1Y_1$  на  $g(t)$ . Тогда параметрическое уравнение траектории точки А будет иметь вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cdot \sin t + f(t); \\ y_1 &= r \cdot \cos t + g(t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (1)$$



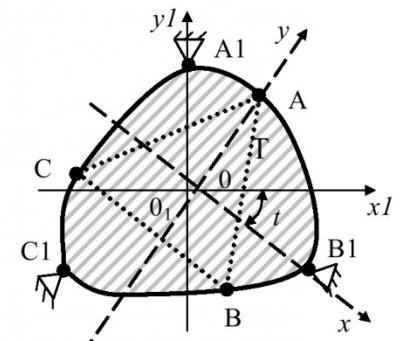
Так как при  $t=0$  точка О должна совпадать с точкой  $O_1$ , то должно выполняться условие  $f(0)=g(0)=0$ . Потребуем, чтобы при повороте на угол  $t=2\pi/3$  точка А совпадает с точкой  $B_1$ , точка В – с точкой  $C_1$ , а точка С – с точкой  $A_1$ . При повороте на угол  $t=4\pi/3$  точка А должна перейти в точку  $C_1$ , точка В – в точку  $A_1$ , а точка С – в точку  $B_1$ . Объединение данных требований на движение вершин треугольника приводит к условиям на значения функций перемещения центра вращения

$$\begin{aligned} f(0) &= f(2\pi/3) = f(4\pi/3) = 0; \\ g(0) &= g(2\pi/3) = g(4\pi/3) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Условиям (2) удовлетворяет широкий класс функций, в частности функции вида  $\sin(3mt/2)$ , где  $m$  целое, и их линейные комбинации с переменными в общем случае коэффициентами вида:

$$H(t) = \sum_{m=1}^N h_m(t) \cdot \sin(3mt/2) \quad (3)$$

Кроме того, в качестве



*Рис.1. Расчетная схема: а) – положение неподвижного тела и его связей в системе  $XOY$ ; б) – положение неподвижной системы  $X1O1Y1$ , связанной с телом, и подвижной системы  $XOY$ , связанной с треугольником АВС*

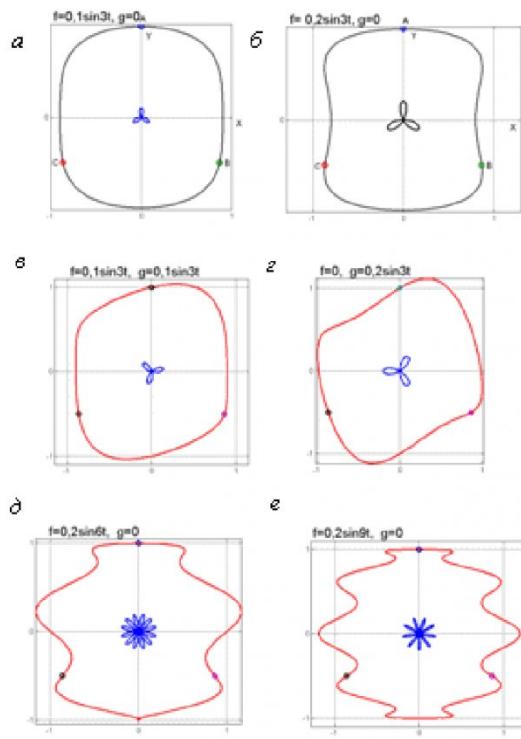


Рис.2. Формы тел и траектории движения их центров вращения

функций перемещения могут быть взяты функции, определяющие замкнутые кривые, такие например, как циклоиды, трохоиды, лемнискаты, с подходящими по условию (2) параметрами. При этом все возможные функции должны быть периодическими с периодом  $2\pi/3$ .

Таким образом, система параметрических уравнений (1) с условиями на значения функций  $f(t)$ ,  $g(t)$  (2) или в их виде (3) дает искомое уравнение границы тела Т. На рис.2 представлены примеры возможных форм тела, удовлетворяющих условиям поставленной задачи. В центре каждого рисунка показана траектория центра вращения  $O_1$ , а точечные связи А, В, С увеличены для их лучшей визуализации. Эти примеры показывают, что даже простые виды функций из класса, определяемого выражением (3) с постоянными коэффициентами, дают нам достаточно широкий набор кривых, описывающих границы тел, совершающих вращение и

колебания одновременно при наличии только одной степени свободы. Границные кривые а), в) на рис.2 соответствуют перемещению центра вращения только по горизонтальной оси  $O_1X_1$  по гармоническому закону, и как видно имеют две оси симметрии и могут быть как чисто выпуклыми, овальными (рис. 2а), так и сочетать выпуклость с вогнутостью (рис.2б). При вертикальном и горизонтальном гармоническом законе с одинаковой амплитудой перемещения центра вращения граничные кривые теряют симметричность (рис. 2в,г). Существенное влияние частоты гармонических колебаний на форму граничной кривой тела показано на рис.2 д, е. Не проводя в данной работе полный анализ влияния амплитуды и частоты на форму и геометрические свойства граничных кривых, хотелось отметить, что представленные примеры на рис.2 уже показывают возможность решения технических задач по выбору нужной формы

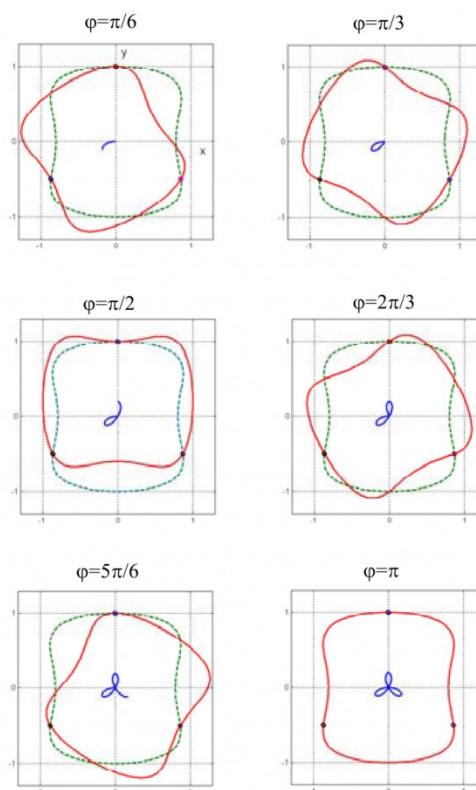


Рис.3. Положение тела при повороте на угол  $\varphi$  и соответствующая траектория движения его центра вращения

тела для совмещения его вращательного движения с колебаниями в плоскости вращения.

Рассматривая теперь перемещение тела относительно неподвижной системы координат  $XOY$ , связанной с треугольником АВС, то есть переходя из системы координат  $X_1O_1Y_1$  в систему координат  $XOY$ , получим следующие параметрические уравнения граничной кривой тела при заданном угле поворота  $\varphi$

$$\begin{aligned} x &= [x_1 - f(\varphi)] \cos \varphi - \\ &\quad - [y_1 - g(\varphi)] \sin \varphi; \\ y &= [x_1 - f(\varphi)] \sin \varphi + \\ &\quad + [y_1 - g(\varphi)] \cos \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

или с учетом уравнений (1) уравнения (4) принимают вид

$$\begin{cases} x = [R \sin t + f(t) - f(\varphi)] \cos \varphi - \\ \quad - [R \cos(t) + g(t) - g(\varphi)] \sin \varphi, \\ y = [R \sin t + f(t) - f(\varphi)] \sin \varphi + \\ \quad + [R \cos(t) + g(t) - g(\varphi)] \cos \varphi. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (5) позволяют описать траекторию любой точки тела по ее заданным поляр-

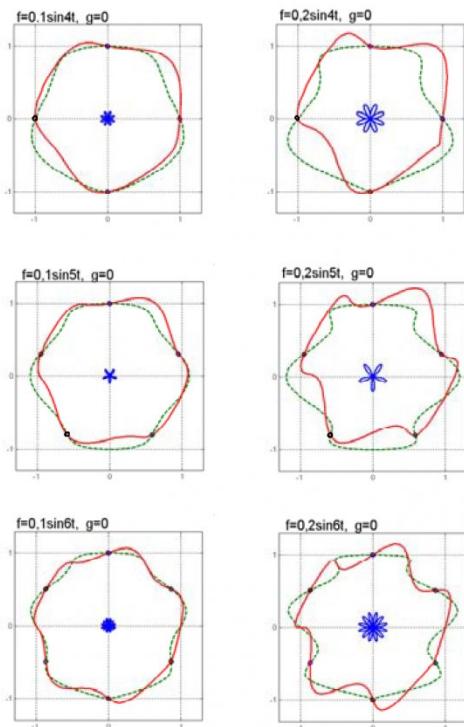


Рис. 4. Варианты форм тел с различным числом связей, обеспечивающие совместность вращения и колебания тел

ным координатам  $R, t$ . В частности при  $R=0, t=0$  имеем точку, совпадающую с началом координат  $O_1$ , то есть центр вращения, траектория движения которого в рассматриваемой схеме описывается уравнениями, следующими из (5):

$$\begin{cases} x_0 = -f(\varphi) \cos \varphi + g(\varphi) \sin \varphi, \\ y_0 = -f(\varphi) \sin \varphi - g(\varphi) \cos \varphi. \end{cases} \quad (6)$$

На рис.3 показан пример положений тела (рис.2б) при его повороте на угол  $\varphi$ , а в центре каждого рисунка показана траектория центра вращения  $O_1$ , соответствующая повороту тела на этот угол. Технически несложно сделать анимацию

показанного движения тела на рис.3 вместо физической модели, однако рамки журнальной статьи могут это позволить только в электронном варианте. Показанный пример был все-таки проверен авторами на физической модели с минимальными по возможности погрешностями, допускаемыми при ее изготовлении. Физическая модель была выполнена А.А. Сурковым.

Обобщением рассмотренной задачи является система  $n$  идеальных связей в виде точек, расположенных в вершинах правильного  $n$ -угольника, препятствующих только поступательным перемещениям тела. Поэтому, как и в случае с треугольником, тело может начать совершать поворот относительно центра вращения, являющегося точкой пересечения нормалей к границе тела в точках связи. В этом случае уравнение траектории точки тела  $A$ , находящейся на оси  $OY$ , и отстоящей от центра вращения на расстоянии  $R$ , будет иметь такой же вид как и (1). Условия на значения функций перемещения центра вращения (2) в этом случае примут

вид

$$f(2k\pi/n) = g(2k\pi/n) = 0. \quad (7)$$

Условию (7) соответствуют периодические функции с периодом  $2\pi/n$ , например  $\sin(n \cdot m \cdot t/2)$ , а также их линейные комбинации вида (3) и другие функции, описывающие замкнутые кривые. Аналогичные, указанные выше, рассуждения приводят к тем же уравнениям (4-6), позволяющим рассчитать форму тела, его положения при повороте и траекторию центра вращения при согласованных с вращением колебаниях тела. Примером таких расчетов служит рис.4, на котором пунктирной линией показано начальное положение тел, сплошной линией – положение тел при повороте на угол  $\pi/3$ , а в центре каждого рисунка полная траектория центра вращения при полном повороте тела. И хотя в этом примере рассмотрено только горизонтальное перемещение центра вращения  $O$ , как центра  $n$ -угольника, полученные результаты показывают широкий спектр возможных форм тела с одной степенью свободы, сочетающего вращательное движение с колебаниями при наличии четырех, пяти и шести связей.

Полученная методика расчета совместности движений вращения и колебания тел с одной степенью свободы может также быть без каких-либо дополнений использована и для пространственных тел, у которых запрещены перемещения по третьей координате и повороты в других координатных плоскостях.

□ Авторы статьи:

Кобылянский

Дмитрий Михайлович

- аспирант каф. стационарных и транспортных машин

Горбунов

Валерий Федорович

- докт. техн. наук, проф. каф. стационарных и транспортных машин

Гоголин

Вячеслав Анатольевич

- докт. техн. наук, проф. каф. прикладной математик и