ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть $f(n)$ - функция натурального аргумента, значения которой представляют собой сходящуюся последовательность. При этом соответствующие точки числовой оси образуют компактное точечное множество.

Обозначим через $m(\varepsilon)$ наименьшее число непересекающихся интервалов длины ε, покрывающих данное множество точек, и определим фрактальную размерность множества формулой Минковского

$$\lambda = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\log m(\varepsilon) / \log \varepsilon \right],$$

где основание логарифма, как легко видеть, не влияет на результат вычисления.

Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность

$$f(n) = 1 / n^k,\ k > 0.$$

Полагая $\varepsilon = 1 / n^{k+1}$, получим $m(\varepsilon) = n$, $\lambda = 1/(k+1)$.

Таким образом, фрактальная размерность этой последовательности зависит от порядка роста степенной функции и с увеличением показателя степени стремится к нулю. Отсюда следует, что для функций $\varphi(n)$, возрастающих быстрее степенной (при любом показателе степени) таких, например, как a^n, $n!$ и т. д., размерность последовательности $1/\varphi(n)$ равна нулю.

Особый интерес представляет случай, когда функция $f(n)$ не является элементарной. Важным представителем такой ситуации служит сходящаяся к нулю последовательность $f(n) = 1/P_n$, где P_n - простое число с порядковым номером n.

В силу известной теоремы Адамара

$$\lim_{n \to \infty} \left(P_n / ln(n) \right) = 1.$$

Из этой теоремы следует, что последовательности $1/P_n$ и $1/(n \cdot ln(n))$ асимптотически эквивалентны и имеют одинаковую фрактальную размерность. Поэтому достаточно найти размерность последовательности $f(n) = 1/(n \cdot ln(n))$.

Расстояние между соседними членами этой последовательности равно $1/(n \cdot ln(n)) - 1/((n+1) \cdot ln(n+1))$.

Принимая длину покрывающих интервалов меньшей этого расстояния

$\varepsilon = 1 / [n(n+1) \cdot ln(n)]$

получим $m(\varepsilon) = n$ и, следовательно,

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{ln(n)}{2 \cdot ln(n) - ln(ln(n))} = 0.5.$$

Эмпирическую оценку фрактальной размерности для последовательности $1/P_n$ можно получить, рассматривая выборку всех простых чисел в некотором отрезке натурального ряда. Так для простых чисел от 2 до 499 при $\varepsilon = 0.002$ получим $m(\varepsilon) = 23$. При этом $\lambda \approx ln(23) / ln(500) \approx 0.504$, , что практически совпадает с приведенным выше результатом вычислений.

Автор статьи:

Бирюков Альберт Васильевич - докт. техн.наук, проф., зав.каф.высшей математики