

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть $f(n)$ - функция натурального аргумента, значения которой представляют собой сходящуюся последовательность. При этом соответствующие точки числовой оси образуют компактное точечное множество.

Обозначим через $m(\varepsilon)$ наименьшее число не-пересекающихся интервалов длины ε , покрывающих данное множество точек, и определим фрактальную размерность множества формулой Минковского

$$\lambda = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\log m(\varepsilon) / \log \varepsilon],$$

где основание логарифма, как легко видеть, не влияет на результат вычисления.

Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность

$$f(n)=1/n^k, k>0.$$

Полагая $\varepsilon=1/n^{k+1}$, получим $m(\varepsilon)=n$, $\lambda=1/(k+1)$.

Таким образом, фрактальная размерность этой последовательности зависит от порядка роста степенной функции и с увеличением показателя степени стремится к нулю. Отсюда следует, что для функций $\varphi(n)$, возрастающих быстрее степенной (при любом показателе степени) таких, например, как a^n , $n!$ и т. д., размерность последовательности $1/\varphi(n)$ равна нулю.

Особый интерес представляет случай, когда функция $f(n)$ не является элементарной. Важным представителем такой ситуации служит сходящая-

ся к нулю последовательность $f(n)=1/P_n$, где P_n - простое число с порядковым номером n .

В силу известной теоремы Адамара

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n / \ln(n)) = 1.$$

Из этой теоремы следует, что последовательности $1/P_n$ и $1/(\ln(n))$ асимптотически эквивалентны и имеют одинаковую фрактальную размерность. Поэтому достаточно найти размерность последовательности $f(n)=1/(\ln(n))$.

Расстояние между соседними членами этой последовательности равно $1/(\ln(n)) - 1/(\ln(n+1))$.

Принимая длину покрывающих интервалов меньшей этого расстояния

$$\varepsilon = 1 / [n(n+1) \cdot \ln(n)]$$

получим $m(\varepsilon)=n$ и, следовательно,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{2 \cdot \ln(n) - \ln(\ln(n))} = 0.5.$$

Эмпирическую оценку фрактальной размерности для последовательности $1/P_n$ можно получить, рассматривая выборку всех простых чисел в некотором отрезке натурального ряда. Так для простых чисел от 2 до 499 при $\varepsilon=0.002$ получим $m(\varepsilon)=23$. При этом $\lambda \approx \ln(23) / \ln(500) \approx 0.504$, что практически совпадает с приведенным выше результатом вычислений.

□ Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт. техн. наук, проф.,
зав. каф. высшей математики