

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

**УДК 519.6:517.958:533.7**

**М.Д. Михайлов, Е.А. Панасенко, Н.А. Шинкин**

### **О ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА**

В данной работе предлагается модификация классической модели Лотки-Вольтерра, учитывающая кроме скорости роста популяций, интенсивности выедания и эффективности усвоения жертв хищниками и внутривидовой конкуренции, возраст хищников и жертв, а также влияние антропогенного фактора (охоты) на численность обеих популяций.

Исследуются три типа моделей: точечная, одномерная пространственная и двумерная. В качестве метода решения соответствующих задач выбирался метод сеток [1]. Численное решение двумерной задачи осуществлялось с помощью метода расщепления [1] с использованием неявной разностной схемы Писсмена, Дугласа, Фербенкса [1]. Результаты численных расчетов приводятся в виде графиков, построенных в среде Excel, Surfer.

#### **Точечная модель**

Одним из способов изучения поведения сложных систем является математическое моделирование [2].

Его применение в экологии дает возможность разобраться в экологических проблемах с позиции математика. Этот подход позволяет прогнозировать развитие популяций при усиленном воздействии человека на природу и позволяет предотвратить разорение природных ресурсов, а также исчезновение многих видов ценнейших животных.

Рассматривается точечная модель, описываемая системой обыкновенных дифференциаль-

ных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \\ &= N_1 \left( b_1 - a_{11}(N_1 + N_2) - \right. \\ &\quad \left. - a_{12}(M_1 + M_2) - cZ \right) - \\ &\quad - \alpha N_1 - \beta N_1 + \delta N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \\ &= N_2 \left( b_1 - a_{11}(N_1 + N_2) - \right. \\ &\quad \left. a_{12}(M_1 + M_2) - cZ \right) + \\ &\quad + \beta N_1 - \delta N_2 - \omega N_2, \\ \frac{dM_1}{dt} &= \\ &= M_1 \left( -b_2 + a_{21}(N_1 + N_2) \right) - \\ &\quad - c_1 Z \\ &\quad - \alpha M_1 - \beta M_1 + \delta M_2, \\ \frac{dM_2}{dt} &= \\ &= M_2 \left( -b_2 + a_{21}(N_1 + N_2) \right) + \\ &\quad - c_1 Z \\ &\quad + \beta M_1 - \delta M_2 - \omega M_2, \\ \frac{dZ}{dt} &= \left( q + c(N_1 + N_2) + \right. \\ &\quad \left. + c_1(M_1 + M_2) - \right) Z, \\ &\quad - \alpha(N_1 + M_1) - \\ &\quad - \omega(N_2 + M_2) \end{aligned} \quad (1)$$

с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} N_1(0) &= N_{10}, \quad N_2(0) = N_{20}, \\ M_1(0) &= M_{10}, \quad M_2(0) = M_{20}, \\ Z(0) &= Z_0 \end{aligned} \quad (2)$$

В системе (1) используются следующие обозначения:  $N_1$ ,

$N_2$  - численность молодых и пожилых жертв соответственно;  $M_1$ ,  $M_2$  - численность молодых и пожилых хищников;  $Z$  - количество особей убитых на охоте;  $a_{ii}$  и  $b_i$  характеризуют скорость роста  $i$ -й популяции в отсутствие других, в частности,  $a_{11}$  указывает на наличие внутривидовой конкуренции в популяции жертв;  $a_{12}$  и  $a_{21}$  - интенсивность выедания и эффективность усвоения жертв хищником;  $\alpha$  - интенсивность гибели особей младшего возрастного класса;  $\beta$  - коэффициент перехода «молодых» особей в старший возрастной класс;  $\omega$  - интенсивность гибели особей старшего возрастного класса;  $\delta$  - коэффициент рождаемости особей младшего возрастного класса;  $c$ ,  $c_1$  - коэффициенты гибели жертв и хищников соответственно в результате охоты;  $q$  - коэффициент отстрела животных в сезон охоты.

Качественное исследование [3] системы (1) показывает, что она имеет три особые точки, одна из которых - устойчивый фокус.

Численное решение задачи (1)-(2) определяется методом Рунге-Кутты 4-го порядка [4]. По результатам счета строились графики в фазовых плоскостях (рис.1), которые представляют собой спирали, закручивающиеся в направлении особой точки. По оси абсцисс откладывалось количество жертв, а по оси ординат - количество хищников. Из рис.1 видно, что особая точ-

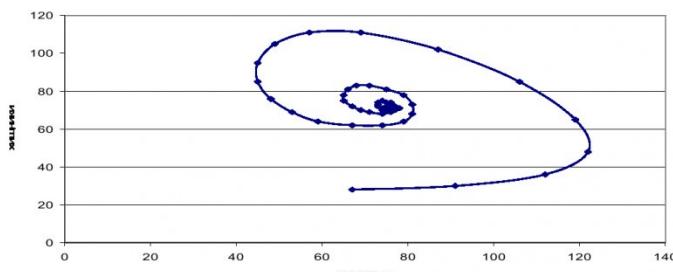


Рис.1. Молодые особи в фазовой плоскости

ка является устойчивым фокусом. Такая картина наблюдается при построении графиков в фазовой плоскости для молодых жертв и хищников, а также для пожилых хищников и жертв.

На рис.2 представлено изменение численности молодых особей во времени, из анализа которого следует, что численность молодых жертв и хищников колеблется с течением времени, но к моменту  $t=110$  суткам она достигает постоянной величины.

На рис.3 показано изменение численности особей убитых на охоте с течением времени и наступление стабилизации при

$t=115$  суткам.

#### Одномерная пространственная модель

Для создания такой модели в систему (1) вводился оператор диффузии с соответствующими коэффициентами в зависимости от того, в какое уравнение он добавлялся. Вместо численности популяций в модели использовалась плотность популяций. Покажем, как осуществляется переход к плотности соответствующего вида. Предположим, что известна численность популяций зайцев (жертвы) и волков (хищники) в 1999 и 2000 гг. Тогда плотность популяций в 2000 г. для жертв и хищников соответственно будет

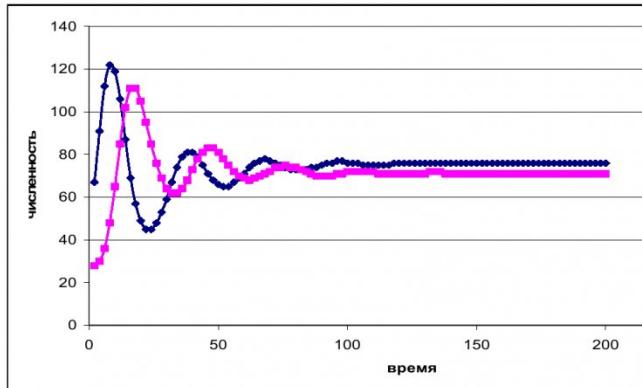


Рис.2. Динамика численности молодых особей с течением времени

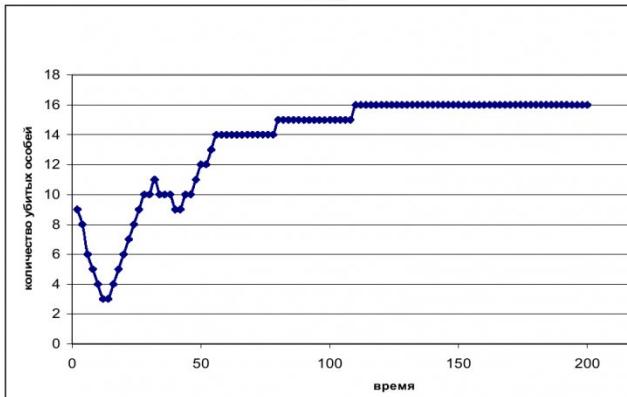


Рис.3. Изменение результатов охоты с течением времени

определяться как отношение их численности в 2000 г. к соответствующей численности в 1999 г. (в настоящей работе в качестве жертв и хищников брались популяции зайцев и волков на территории лесных угодий длиной в 140 км Томской области).

Тогда одномерная пространственная модель будет представлять собой систему уравнений в частных производных вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial PN_1}{\partial t} = & \\ = PN_1 & \left( b_1 - a_{11}(PN_1 + PN_2) - \right. \\ & \left. - a_{12}(PM_1 + PM_2) - cPZ \right) - \\ - \alpha PN_1 - \beta PN_1 + \delta PN_2 + & \\ + D_{PN_1} \frac{\partial^2 PN_1}{\partial x^2}, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial PN_2}{\partial t} = & \\ = PN_2 & \left( b_2 - a_{21}(PN_1 + PN_2) - \right. \\ & \left. - a_{22}(PM_1 + PM_2) - cPZ \right) + \\ + \beta PN_1 - \delta PN_2 - \omega PN_2 + & \\ + D_{PN_2} \frac{\partial^2 PN_2}{\partial x^2}, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial PM_1}{\partial t} = & \\ = PM_1 & \left( -b_1 + a_{11}(PN_1 + PN_2) \right) - \\ & - c_1 PZ \\ - \alpha PM_1 - \beta PM_1 + \delta PM_2 + & \\ + D_{PM_1} \frac{\partial^2 PM_1}{\partial x^2}, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial PM_2}{\partial t} = & \\ = PM_2 & \left( -b_2 + a_{21}(PN_1 + PN_2) \right) + \\ & - c_2 PZ \\ + \beta PM_1 - \delta PM_2 - \omega PM_2 + & \\ + D_{PM_2} \frac{\partial^2 PM_2}{\partial x^2}, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial PZ}{\partial t} = & \\ = PZ & \left( q + c(PN_1 + PN_2) + \right. \\ & \left. + c_1(PM_1 + PM_2) - \right) + \\ - \alpha(PN_1 + PM_1) - & \\ - \omega(PN_2 + PM_2) & \\ + D_{PZ} \frac{\partial^2 PZ}{\partial x^2} & \end{aligned}$$

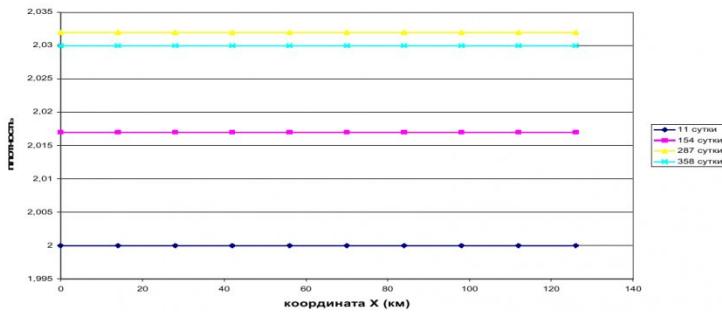


Рис.4. Распределение плотности пожилых жертв в пространстве при  $t=11,154,287,358$  суткам

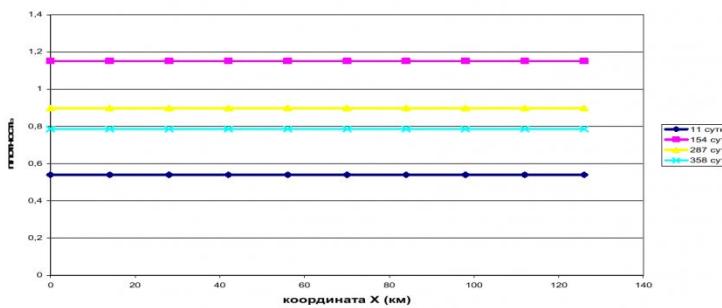


Рис.5.Распределение плотности особей убитых на охоте на 11,154,287,358 сутки

(3)

Показано, что схема услов-

с соответствующими начальны-  
ми

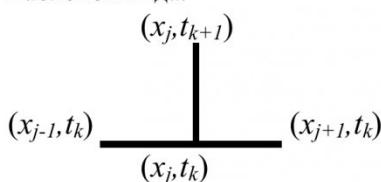
$$\begin{aligned} PN_1(x,0) &= PN_{1_0}, \\ PN_2(x,0) &= PN_{2_0}, \\ PM_1(x,0) &= PM_{1_0}, \quad (4) \\ PM_2(x,0) &= PM_{2_0}, \\ PZ(x,0) &= PZ_0 \end{aligned}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial PN_1}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial PN_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial PM_1}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial PM_2}{\partial x} = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

где  $PN_1$ ,  $PN_2$  - плотность молодых и пожилых жертв соответственно,  $PM_1$ ,  $PM_2$  - плотность молодых и пожилых хищников,  $PZ$  - плотность особей убитых на охоте.

Численное решение задачи (3)-(5) осуществляется с помощью явной разностной схемы с шаблоном вида:



но устойчива и имеет погрешность аппроксимации для всех уравнений  $O(\tau+h^2)$ . Границные условия (мягкие) имеют погрешность первого порядка по  $h$ . В целом погрешность аппроксимации будет  $O(\tau+h)$ .

Результаты численных расчетов представлены в виде графиков, на которых показано поведение плотности пожилых жертв и хищников в момент времени  $t = 11, 154,287,358$  суткам (рис.4), а также результаты охоты в те же моменты времени (рис.5).

Кроме того, строились графики изменения плотности популяций с течением времени и графики в фазовых плоскостях в пространственной точке  $x=28$  км. Полученные графики совпали с аналогичными графиками для точечной модели.

### Двумерная модель

В этой модели миграции

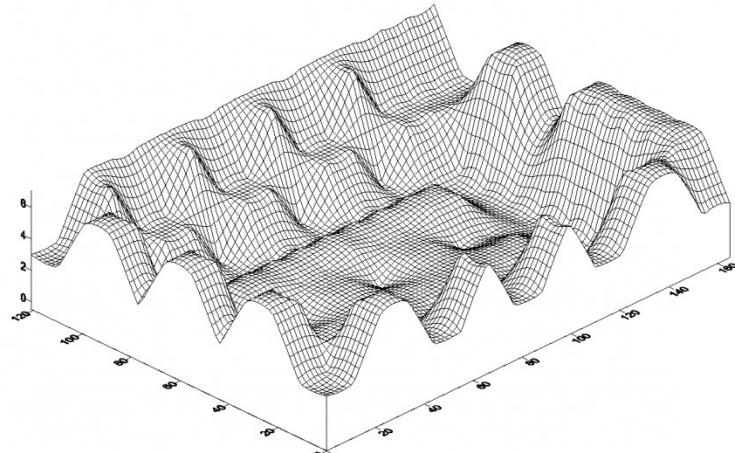


Рис.6. Распределение молодых жертв по ареалу обитания в начальный момент времени

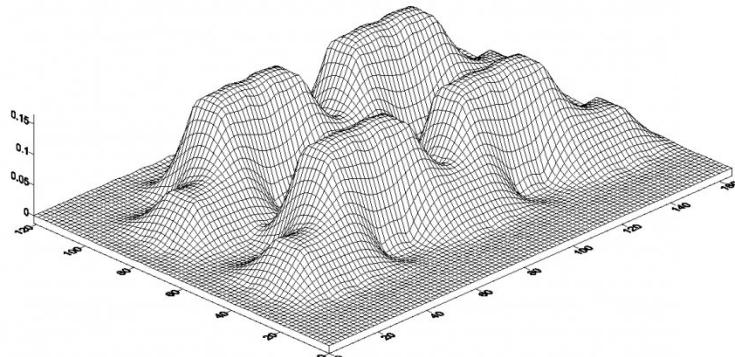


Рис.7. Начальное распределение молодых хищников по ареалу обитания

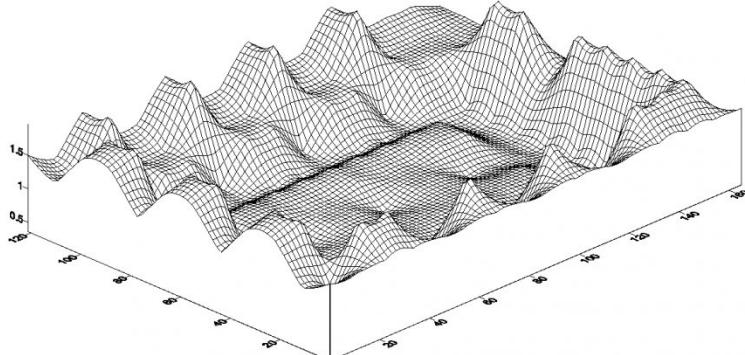


Рис.8. Распределение особей убитых на охоте в начальный момент времени

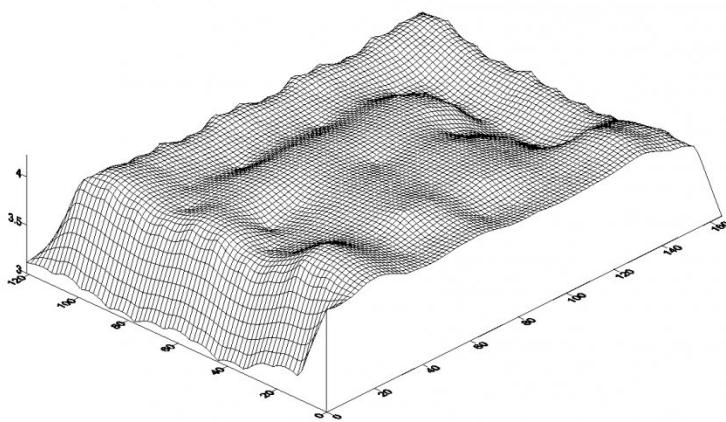


Рис.9. Распределение молодых жертв по ареалу обитания на 182 сутки

животных по территории счита-  
ем нецеленаправленными, и для  
их описания в (1) будет введен  
оператор диффузии

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

с коэффициентами  $\lambda_i > 0$ ,  $i=1,5$   
характеризующими интенсив-

ность миграций.

Эта модель описывается  
системой дифференциальных  
уравнений в частных производ-  
ных с соответствующими начальными и граничными усло-  
виями [5].

В качестве начальных дан-  
ных брались сведения о числен-  
ности популяции зайцев (жерт-

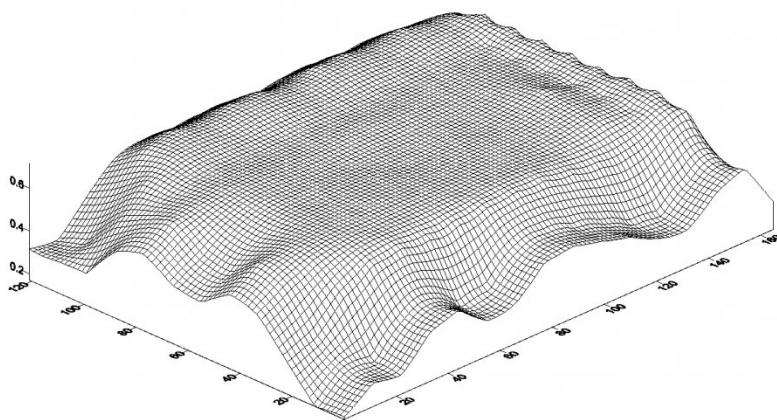


Рис.10. Распределение молодых хищников по ареалу обитания на 182 сутки

вы) и волков (хищники) в 2000 г. на территории Томской об-  
ласти [6]. Был осуществлен пе-  
реход от численностей популя-  
ций к соответствующим плот-  
ностям.

Для численного решения поставленной задачи исполь-  
зовалась схема переменных на-  
правлений [1]. Эта схема абсо-  
лютно устойчива и сходится со  
скоростью  $O(\tau^2+h^2)$ . Реализа-  
ция схемы переменных направ-  
лений осуществлялась с помо-  
щью метода продольно-  
поперечной прогонки.

Результаты численного сче-  
та представлены в виде графи-  
ков, изображающих размещение  
особей по ареалу обитания. В  
начальный момент времени же-  
ртвы сосредоточены по краям  
ареала (рис.6), хищники же рас-  
пределены по всей рассматри-  
ваемой территории (рис.7). Ох-  
ота в этот же момент време-  
ни осуществляется по всему  
ареалу с небольшим преоблада-  
нием по краям, т.к. жертв от-  
стреливают больше, чем хищ-  
ников (рис.8).

В другой момент времени, а  
именно, при  $t=182$  суткам (рис.9)  
жертвы рассредоточиваются по всему ареалу обита-  
ния с небольшим преобладани-  
ем по краям и в некоторых дру-  
гих местах территории. В тех  
местах, где плотность жертв  
увеличивается, начинает расти и  
плотность хищников, т.е. можно  
сказать, что осуществляется  
погоня хищников за жертвами  
(рис.10). В это же время, в тех  
местах, где плотность убитых  
особей больше, плотность жертв  
и хищников уменьшается,  
например при  $x = 0,20,\dots,160$  км  
и  $y = 60,100$  км (рис.11).

При  $t=365$  суток наступает  
стабилизация плотности жертв  
и хищников, и они располагают-  
ся равномерно по всему ареалу. Но на промежутке от 0  
до 40 км по  $x$  плотность жертв  
больше и в эту сторону устрем-  
ляются хищники (рис.12-13).  
Распределение плотности уби-  
тых особей в этот момент вре-

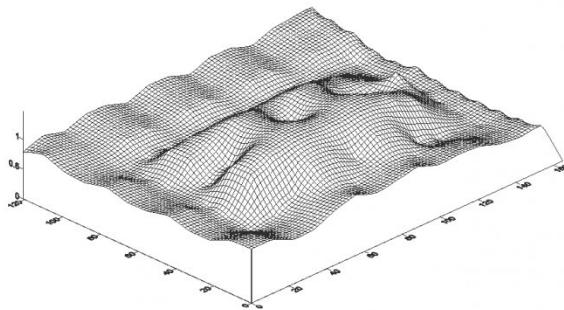


Рис.11. Распределение особей убитых на охоте на 182 сутки

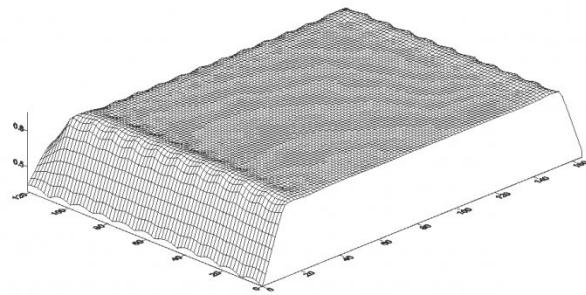


Рис.13. Распределение молодых хищников по ареалу обитания на 365 сутки

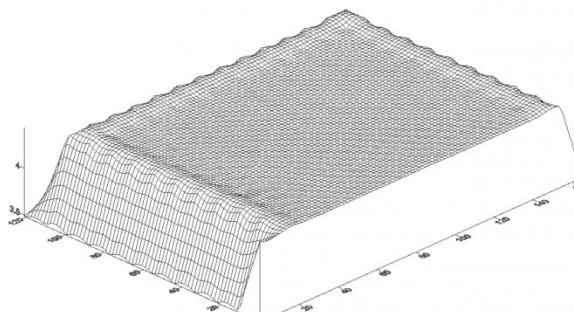


Рис.12. Распределение молодых жертв по ареалу обитания на 365 сутки

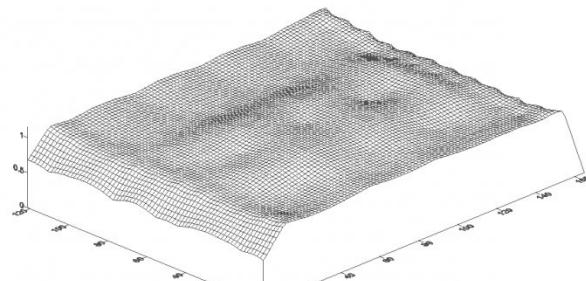


Рис.14. Распределение особей, убитых на охоте на 365 сутки

мени аналогично распределению при  $t=182$  суткам (рис.14).

Кроме того, строились графики изменения плотности популяций с течением времени и графики в фазовых плоскостях в пространственной точке  $(x,y)$ , где  $x=77$  км,  $y=55$  км. Полученные графики внешние совпадают с графиками, приведенными на рис.1-3 (результаты расчетов были получены для 2001 г.). Переходя от плотности популя-

ции к численностям, мы провели сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [6]. Относительная погрешность составила 13%.

#### Выводы

1) Плотность особей убитых на охоте должна быть примерно в 3 раза меньше плотности популяций жертв и хищников. При таком условии популяции будут существовать, не вымирая, и плотность не будет значительно меняться;

2) Плотность популяции жертв должна быть больше плотности популяции хищников примерно в 8 раз;

3) Плотность молодых особей должна быть меньше плотности пожилых: для жертв в 2 раза, для хищников в 1.2 раза;

4) Когда плотность особей убитых на охоте составляет 80%, происходит вымирание популяции.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем.– М.: Наука, 1971. – 552 с.
2. Тривоженко Б.Е. Математическое модели естествознания: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТГУ, 1985. – 87 с.
3. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. – М.: УРСС, 2001.
4. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002.
5. Логинов М.В., Михайлов М.Д. Двумерная модель взаимодействия типа «хищник-жертва» с учетом внутривидовой конкуренции // Вестник Томского государственного университета: Бюллетень оперативной научной информации. -Томск : изд. ТГУ, №10, 2003. - с.89-100
6. <http://green.tsu.ru>.

□ Авторы статьи:

Михайлов  
Михаил Дмитриевич  
-ст. преподаватель каф. вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета

Панасенко  
Елена Александровна  
- студентка Томского государственного университета

Шинкин  
Николай Алексеевич  
-канд. биолог. наук,  
ст. научный сотрудник НИИ ББ  
Томского государственного университета