СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

УДК 622-235.01.1

С.Н. Шабаев

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПРОЕКТИРОВАНИИ СМЕСИ ОПТИМАЛЬНОГО ЗЕРНОВОГО СОСТАВА

В последние годы интерес к дорожным покрытиям и основаниям из плотных щебеночных смесей существенно повысился. Это объясняется, с одной стороны, новыми технологическими возможностями при их производстве и укладке, чем достигается высокое качество, с другой – ремонтопригодностью и легкостью содержания покрытий.

Методы проектирования и требования к гранулометрическому составу щебеночных смесей для слоев дорожных одежд [1] были разработаны еще в середине прошлого века и не отвечают современному уровню технологии их приготовления и использования. В данной статье предлагается решение задачи о наиболее плотном расположении частиц, которое может служить основой методики проектирования оптимальных щебеночных смесей.

Смесь оптимального зернового состава должна иметь наименьшую пустотность. Для решения задачи проектирования таких смесей рассмотрим вопрос о наиболее плотном расположении частиц.

Предполагая, что одноразмерные сферические частицы располагаются равномерно по всему объему, принимаем N_x, N_y, N_z – число частиц в заданном объеме соответственно по осям x, y, z; тогда:

$$N_x = \frac{dx}{K_x \cdot D};$$

$$N_y = \frac{dy}{K_y \cdot D}; \; N_z = \frac{dz}{K_z \cdot D},$$

где dx, dy, dz – линейные размеры занимаемого частицами пространства;

K_x, K_y, K_z – коэффициенты, учитывающие расстояние между частицами соответственно по осям x, y, z, причем считаем, что они равны единице, когда расстояние между центрами тяжести двух шаров равно диаметру шара D.

Общее количество частиц в занимаемом ими объеме равно:

$$N = N_x N_y N_z = \frac{dx}{K_x D} \cdot \frac{dy}{K_y D} \cdot \frac{dz}{K_z D} = \frac{dxdydz}{D^3 K_x K_y K_z} = \frac{dxdydz}{D^3 \cdot K_{общ}}$$

Предварительно рассмотрим случай наиболее плотного расположения частиц в плоской задаче. Пусть имеется некоторая площадь $S_{исх} = dx \cdot dy$. Необходимо так разместить круги с диаметром D, чтобы занять максимально возможную площадь. При этом площадь, занимаемая частицами, будет определяться из равенства:

$$S = \frac{dx}{K_x D} \cdot \frac{dy}{K_y D} \cdot Sч,$$

где

$$Sч = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

– площадь одной частицы; тогда

$$S = \frac{\pi \cdot dxdy}{4 \cdot K_x K_y}. \qquad (1)$$

Из приведенного равенства можно сделать вывод, что площадь, занимаемая частицами, не зависит от их диаметра, а находится в зависимости лишь от плотности расположения частиц, характеризуемой коэффициентами K_x и K_y. Равенство верно при $S \to \infty$, но при $S >> Sч$ оно также справедливо. Неизвестными параметрами

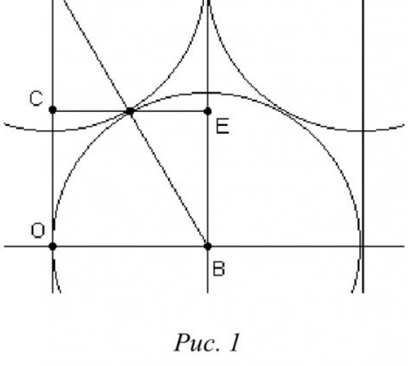

Рис. 1

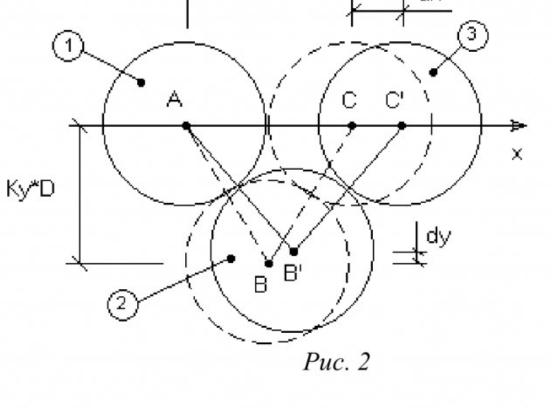

Рис. 2

являются коэффициенты K_x и K_y. Для их отыскания рассмотрим геометрическую задачу.

Пусть имеются частицы одинакового размера. Предположим, что частицы вдоль оси *x* лежат на одной прямой, причем их центры тяжести совпадают с осью. Исходя из задачи о наиболее плотном расположении частиц, считаем, что коэффициент $K_x=1$, то есть зерна соприкасаются друг с другом. Для того, чтобы площадь, занимаемая частицами, была максимальна, необходимо, чтобы знаменатель формулы (1) имел минимальное значение. Согласно рис. 1 определяем минимальное значение коэффициента K_y:

$AO=AC+OC$, но $AC=BE$, тогда $AO=2BE$; $AB=D$, где D – диаметр частиц, $OB=D/2$, тогда: $AO=(D^2-(D/2)^2)^{0.5}=0{,}866D$.

Таким образом, минимальное значение коэффициента K_y равно 0,866 при $K_x=1$.

Докажем, что площадь, занимаемая частицами, будет выше при $K_x=1$, чем при любом большем его значении.

Пусть значение коэффициента $K_x=1+(dx/D)$ (рис. 2). Минимальное значение K_y примет тогда, когда частица 2 будет касаться частиц 1 и 3, а это в свою очередь приведет к смещению центра тяжести 2-й частицы ближе к оси x. При раздвижке зерен 1 и 3, рассматриваемая нами частица будет совершать вращательное движе-

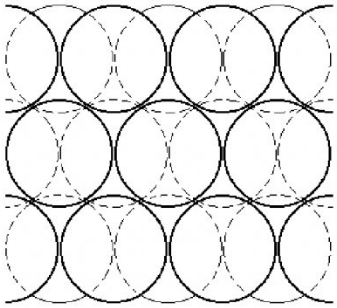

Рис. 3

ние относительно точки А, при этом радиус вращения будет равен D:

$$\left(\frac{D+dx}{2}\right)^2+y^2=D^2,$$

откуда

$$y=0.5(3D^2-2D\cdot dx-(dx)^2)^{1/2}/D$$

причем $K_y \geq 0.5$.

Анализ данного уравнения показывает, что при любом значении $K_x>1$ величина $K_{общ}=K_x\cdot K_y$ имеет большее значение, чем при $K_x=1$, $K_y=0{,}866$, а следовательно и площадь, занимаемая частицами, максимальна. Таким образом, наибольшая плотность расположения зерен будет соответствовать значению $K_{общ}=K_x\cdot K_y=0{,}866$.

От плоской перейдем к пространственной задаче.

Строго теоретического решения задача о наиболее плотной пространственной упаковке шаров одинакового размера пока не имеет [2]. Поэтому по аналогии с плоской задачей за

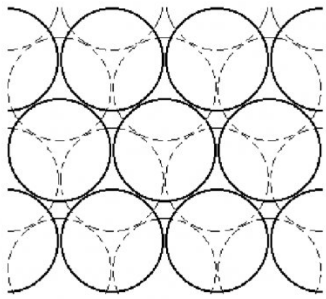

Рис. 4

наиболее плотную упаковку, без строгого математического обоснования, принимают гексагональную упаковку, для которой характерны 12 контактов у частицы [3].

Решим эту задачу с применением коэффициентов рассмотренных ранее. Пусть имеется некоторый объем $V=dxdydz$. Объем занимаемый частицами равен:

$$V=\frac{dx}{K_xD}\cdot\frac{dy}{K_yD}\cdot\frac{dz}{K_zD}\cdot Vч=$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{dxdydz}{K_xK_yK_z}.$$

Рассмотрим случаи гексагональной упаковки шаров.

1. Случай, когда $K_x=1$, $K_y=0{,}866$. Предварительно рассмотрим ситуацию, когда каждая частица имеет по 10 точек контактов (рис. 3). В этом случае коэффициент $K_z=0{,}866$. Чтобы получить 12 точек контактов, необходимо произвести вращение частицы 1 относительно частицы 2 до того момента, пока первая не коснется

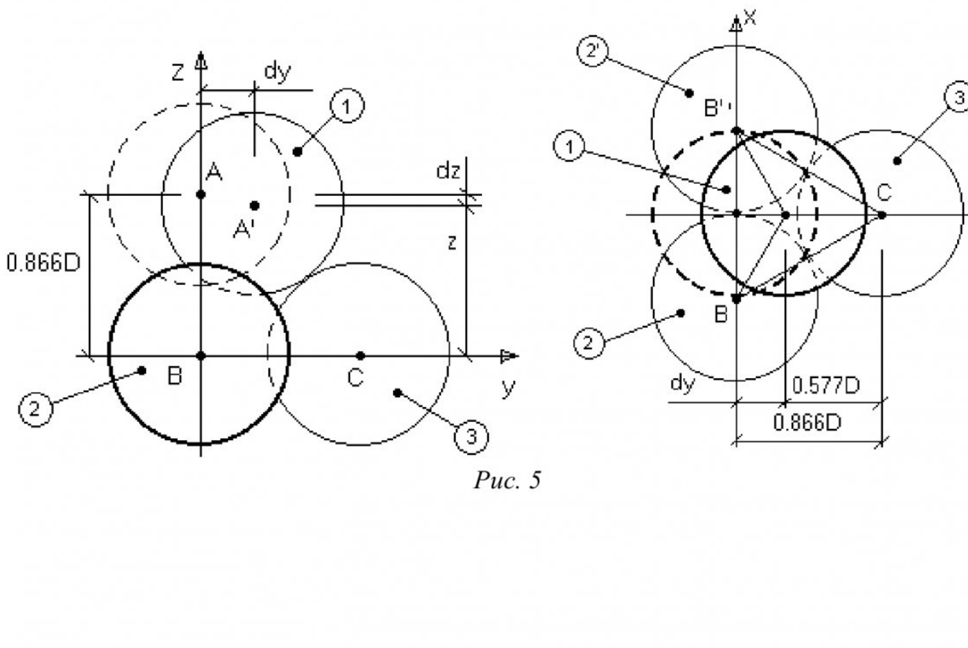

Рис. 5

третьей (рис. 5). Радиус вращения частицы равен *0,866D*. Получаемая в результате вращения гексагональная упаковка шаров показана на рис. 4.

Уравнение окружности имеет вид: $(dy)^2+z^2=(0,866D)^2$.

Из рис. 5 понятно, что

$$dy=0,866D-0,577D=0,289D,$$

следовательно, $z=0,816D$.

Таким образом, в данном случае коэффициент $K_z=0,816$, при этом максимальный объем, занимаемый частицами, равен (при $dx=dy=dz=1$):

$$V=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{dxdydz}{K_xK_yK_z}=$$

$$=\frac{\pi}{6\cdot 1\cdot 0,866\cdot 0,816}=0,741,$$

т.е. при максимальном заполнении одноразмерными шарами плотность упаковки составит 74 %, при этом $K_{общ}=K_x{\cdot}K_y{\cdot}K_z=0,707$.

2. Случай, когда $K_x=1$, $K_y=1$. Исходя из аналогичных рассуждений, получаем (рис. 6): $dy=0,5D$, $z=0,707D$.

Таким образом, коэффициент $K_z=0,707$, при этом максимальный объем, занимаемый частицами, при $dx=dy=dz=1$ равен 0.741. т.е при максимальном заполнении одноразмерными шарами плотность упаковки составит 74 %, при этом $K_{общ}=K_x{\cdot}K_y{\cdot}K_z=0,707$.

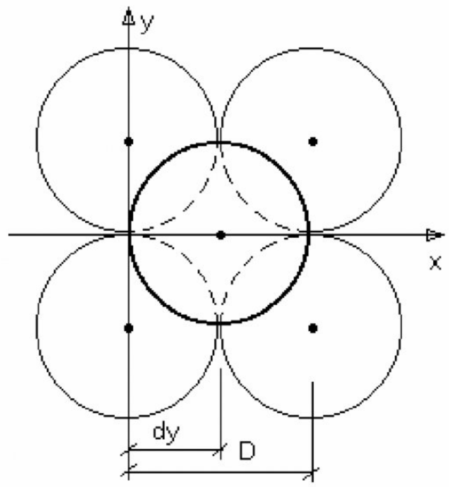

Рис. 6

ВЫВОДЫ

1. В плоской задаче максимально возможная компоновка кругов осуществляется при значении коэффициента $K_{общ}=0,866$. При этом плотность упаковки составляет 91 %.

2. В пространственной задаче максимально возможная компоновка шаров осуществляется при значении коэффициента $K_{общ}=0,707$. При этом максимальный объем, занимаемый этими шарами, составляет 74 % от общего имеющегося пространства.

3. Очевидно, что минимально возможная (теоретическая) пустотность одноразмерного материала составляет 26 %, что явно не удовлетворяет плотным смесям. Поэтому актуальной является задача о проектировании оптимальных (имеющих наименьшую пустотность) смесей из разноразмерных зерен различных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 25607-94*. Смеси щебеночно-гравийно-песчаные для покрытий и оснований автомобильных дорог и аэродромов. Технические условия. Госстрой России. – М.: ЦИТП Госстроя России, 2002.

2. *Китайгородский А.И.* Порядок и беспорядок в мире атомов. М.: Наука, 1984.

3. *Кандауров И.И.* Механика зернистых сред и ее применение в строительстве. 2-е изд., испр. и перераб. Л.: Стройиздат, Ленингр. отд-ние, 1988.

Автор статьи:

Шабаев
Сергей Николаевич
- асп. каф. автомобильных дорог