УДК 621.372.54

Б.В. Соколов

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ АКТИВНЫХ RC-ЦЕПЕЙ

В настоящее время одной из актуальных задач в теории активных фильтров является задача построения различных селективных цепей (активных *RC*-фильтров) с низкой чувствительностью добротности полюсов и нулей их передаточной функции, а также добротности модуля передаточной функции по коэффициенту усиления активного элемента цепи.

Известно [1, 2] несколько путей решения этой задачи применительно к фильтрам. Основной недостаток этих решений заключается в необходимости использования управляемого источника (тока или напряжения) с очень большим коэффициентом усиления *K*.

При этом для реализации полюсов передаточной функции с добротностью $Q>>1$ требуемый порядок коэффициента усиления K оказывается пропорционален квадрату добротности $K{\sim}Q^2$. Этот факт накладывает существенные ограничения на этапе реализации, так как при $Q=50\ldots100$ ввиду большого значения K решение этой задачи резко усложняется (особенно на высоких частотах).

Известны решения задачи построения активных фильтров с низкой чувствительностью добротности с использованием управляемого источника с небольшим коэффициентом усиления [3] на основе структур, реализующих передаточную функцию третьего порядка, в которой нуль сокращается с полюсом.

Известен также метод [4], основанный на оптимальном разложении полиномов третьего порядка на сумму двух полиномов с произвольными корнями. Основным недостатком этого метода, реализованного на основе фантомных нулей, является высокая чувствительность добротности полюсов к пассивным элементам при сравнительно низкой чувствительности к изменению коэффициента усиления активного элемента. Для оценки чувствительности обычно используют классическую относительную или полуотносительную логарифмическую чувствительность [5].

Рассмотрим полином второго порядка с комплексно-сопряженными нулями. Известны следующие соотношения:

$$P_2(p)=p^2+a_1p+a_0=p^2+\Omega_0Q^{-1}p+\Omega_0^2 \qquad (1)$$

где

$a_1=Re\left\{P_1+\bar{P}_1\right\}$; $a_0=P_1\cdot\bar{P}_1$; $P_{1,2}=-\delta_0\pm j\,\omega_0$ – корни полинома; $a_1=2\delta_0$; $\Omega_0^2=\delta_0^2+\omega_0^2$; $\Omega_0=\sqrt{a_0}$.

Угол α между мнимой осью комплексной плоскости и вектором P_1 равен

$$\alpha=arcsin\,a_1/\left(2\sqrt{a_0}\right)=arcsin\,1/(2Q);$$

добротность нуля (корня) полинома (1) определяют из выражения:

$$Q=\sqrt{a_0}/a_1=\Omega_0/(2\delta_0). \qquad (2)$$

Реализуемый в классе цепей с сосредоточенными параметрами полином с вещественными положительными (неотрицательными) коэффициентами может иметь либо два отрицательных вещественных нуля $(\sigma_1,\ \sigma_2)$, либо два комплексно-сопряженных корня $(P_1,\bar{P}_2)$.

При фиксированной величине $\Omega_0=\sqrt{a_0}$ добротность нуля (корня полинома) характеризует степень сближения (угол α) вектора P_1 с мнимой осью комплексной плоскости: при совпадении с ней $\alpha=0$, $Q_k\to\infty$; при $0<\alpha<\pi/2$ корни полинома находятся в левой полуплоскости на окружности с радиусом Ω_0; при $\alpha=\pi/2$ два комплексных корня $(P_1,\bar{P}_2)$ уравнения (1) превращаются в вещественные отрицательные корни $\sigma_1=\sigma_2=\Omega_0$. При этом добротность вещественного корня $Q_в=0.5$. Следовательно, диапазон изменения добротности нулей полинома с комплексно- сопряженными нулями Q_k меняется от ∞ до 0,5. При этом исключается нижняя граница, а добротность отрицательного вещественного кратного нуля $Q_в=0.5$.

При дальнейшем “расхождении” нулей полинома (1) по вещественной оси (остающихся при этом в левой полуплоскости) добротность вещественного нуля имеет значение $Q_в<0.5$.

Рассмотренный выше подход к локализации корней полинома с положительными вещественными коэффициентами на комплексной плоскости позволяет сделать вывод о роли активного элемента в составе пассивной *RC* – цепи. Она выражается в потенциальной возможности “вывода” с помощью активного элемента (*K*) двух вещественных отрицательных нулей $(\sigma_1,\ \sigma_2)$ с вещественной оси левой полуплоскости в любую точку этой полуплоскости (на окружность радиуса Ω_0) в виде комплексно-сопряженной пары полюсов $P_1,\bar{P}_1$.

Заметим, что добротность полюса передаточной функции, знаменатель которой соответствует выражению (1), определяет избирательные (фильтровые) свойства соответствующей модели реализации и, в том числе, полосу пропускания и крутизну скатов амплитудно-частотной характеристики (т.е. модуля передаточной функции цепи).

В теории фильтров [6,7] рассматривают два основных типа разложения полиномов знаменателя передаточной функции активной цепи.

В случае разностного разложения (по Горовицу) этот полином представляют в виде $v(p)=b_2A(p)-KB(p)$.

При этом полином $A(p)$ реализуется пассивной частью цепи.

Для частных случаев этой модели имеем:

$$K_{min}\Big|_{\{\sigma_1,\sigma_2\}\to\{\sigma_0,\sigma_0\}}=\frac{1}{\lambda}\left(1-2Q_в\right),$$

$$K_{min}\Big|_{\{\sigma_0,\sigma_0\}\to\left\{P_1,\bar{P}_1\right\}}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{1}{2Q_к}\right),$$

где λ - коэффициент, определяемый отношением коэффициентов при переменной p у полиномов, формируемых петлей обратной связи и пассивной частью цепи.

Легко убедиться, что на резонансной частоте $\Omega_0=\sqrt{\sigma_1\cdot\sigma_2}=\sigma_0$ модуль чувствительности передаточной функции по коэффициенту усиления активного элемента K равен

$$\left|S_к^{T(j\Omega_0)}\right|=\frac{Q_к}{Q_в}\Big|_{Q_в\to 0,5}\to 2Q,$$

причем

$$Re\left\{S_к^{T(j\Omega_0)}\right\}=\frac{Q_к}{Q_в},\quad J_m\left\{S_к^{T(j\Omega_0)}\right\}=0.$$

Следовательно, при данном разложении нормированное изменение фазы передаточной функции за счет изменения коэффициента усиления на резонансной частоте равно нулю. В данном случае максимум модуля передаточной функции шума достигается на резонансной частоте и равен

$$\left|T_ш\left(j\Omega_0\right)\right|=\left|S_к^{T(j\Omega_0)}\cdot K\right|\le\frac{1}{\lambda}\left(\frac{Q_к}{Q_в}-1\right).$$

Выбор топологии модели, в которой $\lambda\to 1$, обеспечивает дополнительные возможности по минимизации чувствительности и шумов при рассматриваемом виде разложения.

В случае суммарного разложения (по Калахану) полином передаточной функции представляют в виде:

$$U(p)=b_2A(p)+K\gamma_2B(p).$$

В этом случае получим:

$$U(p)=Q_2\left(p^2+a_1p+a_0\right)=$$
$$=b_2\left(p^2+b_1p+b_0\right)+K\gamma_2\left(p^2+\gamma_1p+\gamma_0\right)=$$
$$=b_2\begin{bmatrix}p^2\left(1+K\lambda_2\right)+pb_1\left(1+K\lambda_1\lambda_2\right)+\\+b_0\left(1+K\lambda_0\lambda_2\right)\end{bmatrix},$$

где

$$\lambda_2={}^{\gamma_2}\!/_{b_2},\ \lambda_1={}^{\gamma_1}\!/_{b_1},\ \lambda_0={}^{\gamma_0}\!/_{b_0},$$

$$b_0=\Omega_{0в}^2=\sigma_1\cdot\sigma_2,\ a_0=\Omega_{0к}^2=P_1\cdot\bar{P}_1.$$

Удаленность (степень близости) отрицательных вещественных нулей полинома (1) друг от друга характеризуют абсолютной величиной $\Delta\sigma=\left|\sigma_2-\sigma_1\right|$. При сближении этих нулей резко возрастает разброс номиналов элементов пассивной части цепи.

Выполнение условия $\left|\sigma_2-\sigma_1\right|\rangle\beta$ позволяет реализовать пассивную часть цепи при заданном (минимальном) разбросе номиналов элементов, но при этом нарушается условие оптимальности разложения и увеличивается классическая чувствительность.

Следовательно, условия оптимального разложения и требования по ограничению разброса номиналов элементов пассивной части цепи противоречат друг другу.

Отсюда возникает задача “обмена” разброса номиналов элементов пассивной части цепи на чувствительность (а также на коэффициент усиления используемого активного элемента и на шумы).

В широко применяемой на практике модели Саллена-Кея минимальный коэффициент усиления, необходимый для преобразования пары отрицательных вещественных полюсов $\{\sigma_1,\sigma_2\}$ пассивной части цепи с добротностью $Q_в < 0.5$ в пару комплексных полюсов передаточной функции активной ARC-цепи с добротностью Q_k , равен

$$K_{min}=$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left(1-Q_в/Q_к\right)\Big|_{Q_в\to 0{,}5,\ \lambda\to 1}\to\left(1-\frac{1}{2Q_к}\right)$$

где λ – коэффициент, определяемый отношением коэффициентов при переменной p у полиномов, формируемых петлей обратной связи и пассивной частью цепи.

В рассматриваемом случае добротность комплексного корня равна

$$Q_к=\frac{\sqrt{b_0\left(1+\kappa\lambda_0\right)\left(1+\kappa\right)}}{b_1\left(1+\kappa\lambda_1\right)}.$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Пусть $\lambda_0=\lambda_1=0.$

Тогда

$$Q_к = \sqrt{a_0} / a_1 = Q_в \sqrt{1+к}$$

и

$$K_{min} = (Q_к / Q_в)^2 - 1,$$

причем

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \Omega_{0в}^2.$$

Полагая, что производится оптимальное разложение, получим:

$$K_{min}\Big|_{Q_в=0,5} = 4Q_к^2 - 1,$$

$$S_к^{Q_к} = \frac{к}{2(1+к)} \langle 0,5.$$

$$\left|S_к^{T(j\Omega_0)}\right| = Q_к \sqrt{1 - \left(Q_в^2 / Q_к^2\right)^2 + Q_к^{-2}} \rangle Q_к$$

$$\left|T_ш(j\Omega_0)\right| \cong Q_к^3 / Q_в^2,$$

где

$$\Omega_0 = \sqrt{b_0 / (1+к)}.$$

2. Пусть

$$\lambda_0 \neq 0, \quad \lambda_1 = 0.$$

Тогда $B(p)=p^2+\gamma_0$, $\lambda_0=\gamma_0 / b_0$. В этом случае получим:

$$K_{min} = Q_к / Q_в - 1\Big|_{Q_в=0,5} = 2Q - 1,$$

$$\left|S_к^{T(j\Omega_0)}\right| \cong \sqrt{Q_в^2 (1-\lambda_0)^2 + 1}.$$

Минимизация чувствительности при суммарном разложении осуществляется при соответствующей топологии структуры, а также при условии, когда ее элементы выбираются с учетом соотношения $\lambda_0 \to 1$.

Это условие требует образования кратного вещественного корня и равенства величин

$$\Omega_{0в} = \Omega_{0ф} \ (\Omega_{0в} = \sigma_1 = \sigma_2),$$

$\Omega_{0ф} = \sqrt{\gamma_0}$ – радиус окружности, на которой находятся фантомные нули). При выполнении этого условия $K_{min} \to 2Q_к - 1$, а знак равенства достигается при оптимальном разложении.

Таким образом, представленный выше анализ позволяет сделать вывод о том, что чувствительность передаточной функции по коэффициенту усиления активного элемента определяется выбранным способом разложения полинома ее знаменателя и, соответственно, топологией структуры, реализующей ее.

Следует учитывать, что эта чувствительность минимизируется при оптимальных разложениях, предполагающих необходимость реализации кратных вещественных полюсов в пассивной части цепи, что влечет за собой резкий разброс номиналов элементов и сложность реализации в микроэлектронном исполнении.

Модуль передаточной функции шума также зависит от типа принятого разложения и топологии модели реализации. Он достигает максимума на резонансной частоте и минимизируется при оптимальном разложении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hakim S.S.* Synthesis of active RC-tilters with prescribed sensitivity. – PIEE, 1965, 112, p.2235.
2. *Soderstrand M.A., Mitra S.K.* Design of active tilters with zeropassive Q-sensitivity. – IEEE., 1971, CT-18, №6, p.600.
3. *Bialko M., Sienco W.* Zero Q- sensitivity active RC-circuit synthesis. – IEEE Trans., 1974, CAS-21, №2, p.239.
4. Плешко А.Д. Активные фильтры с низкой чувствительностью добротности. – Изв. ВУЗОВ - Радиоэлектроника, Том 19, №12, с.59.
5. *Гехер К.* Теория чувствительности и допусков электронных цепей. – М., Сов. Радио, 1973. 200с.
6. Синтез активных RC-цепей. Современное состояние и проблемы. Под ред. А.А. Ланнэ. М., Связь, 1975. 296с.
7. *Хьюлсман Л.П.* Теория и расчет активных RC-цепей. – М., Связь, 1973. 238с.

Автор статьи:

Соколов
Борис Васильевич
- канд. техн.наук, доц.каф. электроснабжения горных и промышленных предприятий