

ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ

УДК 622.272 : 516.02

С.В. Черданцев

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ВИНТОВОГО СТЕРЖНЯ, ОБЖАТОГО ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В [1] решена линейная краевая задача о равновесии винтового стержня, обжатого внешней нагрузкой. Здесь рассматривается задача о равновесии в следующей постановке.

Пусть винтовой стержень круглого поперечного сечения длины l установлен без зазоров и без закрепления его концов в круговую цилиндрическую оболочку радиуса R в качестве ребра жесткости. Пусть оболочка равномерно обжимается внешней средой на величину $\Delta = \text{const}$ и обжимает винтовой стержень. Требуется определить углы поворота, перемещения, внутренние моменты и усилия в обжатом стержне.

Предположим, что при равномерном обжатии оболочки стержень останется винтовым. Поэтому угол поворота стержня относительно бинормали $\vartheta_3 = 0$, а параметры обжатого стержня можно определить как

$$u_2 = \Delta, \quad R_I = R - u_2, \quad \alpha_I = \alpha - \vartheta_2,$$

$$\kappa_I = \frac{\sin 2\alpha_I}{2R_I}, \quad \kappa_3 = \frac{\cos^2 \alpha_I}{R_I}, \quad (1)$$

где R_I , α_I – радиус и угол подъема витков обжатого стержня, κ_I , κ_3 – кручение и кривизна его осевой линии.

Поскольку концы стержня не закреплены, то их перемещения, очевидно, симметричны относительно точки, находящейся посередине стержня, а сама срединная точка не перемещается. Следовательно, если начало связанный системы координат совместить с этой точкой, то перемещения u_1 , u_3 и угол поворота ϑ_I относительно

оси стержня в начале координат

$$u_I(0) = 0, \quad u_3(0) = 0, \quad \vartheta_I = 0 \quad (2)$$

В силу (1), линейные уравнения равновесия винтового стержня [1,2] упрощаются к виду:

$$\frac{dQ_1}{ds} - \kappa_{30}Q_2 + q_1 = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dQ_2}{ds} + \kappa_{30}Q_1 - \kappa_{10}Q_3 + q_2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{dQ_3}{ds} + \kappa_{10}Q_2 + q_3 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dM_1}{ds} - \kappa_{30}M_2 = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dM_2}{ds} + \kappa_{30}M_1 - \kappa_{10}M_3 - Q_3 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dM_3}{ds} + \kappa_{10}M_2 + Q_2 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} - \vartheta_2\kappa_{30} - \frac{1}{A_{11}}M_1 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d\vartheta_2}{ds} + \vartheta_1\kappa_{30} - \frac{1}{A_{22}}M_2 = 0, \quad (10)$$

$$\vartheta_2\kappa_{10} - \frac{1}{A_{33}}M_3 = 0, \quad (11)$$

$$\frac{du_1}{ds} - \kappa_{30}u_2 = 0 \quad (12)$$

$$\kappa_{30}u_1 - \kappa_{10}u_3 = 0, \quad (13)$$

$$\frac{du_3}{ds} + \kappa_{10}u_2 + \vartheta_2 = 0. \quad (14)$$

Здесь s – координата, связанная с осью винтового стержня; q_1 , q_2 , q_3 – компоненты распределенной нагрузки, действующие на стержень в процессе его обжатия внешней средой; Q_1 – продольная сила, Q_2 , Q_3 – перерезывающие силы, M_1 – крутящий момент, M_2 , M_3 – изгибающие моменты в произвольном поперечном сечении

стержня; ϑ_I , ϑ_2 – компоненты вектора угла поворота соответственно относительно оси стержня и главной нормали; u_I , u_3 – компоненты вектора перемещения соответственно вдоль оси и вдоль бинормали; κ_{10} – кручение, κ_{30} – кривизна осевой линии винтового стержня в естественном состоянии; A_{11} , A_{22} , A_{33} – соответственно крутильная и изгибные жесткости поперечного сечения стержня.

Совместно с условиями (2) система уравнений (3) – (14) образует краевую задачу о равновесии винтового стержня, равномерно обжатого внешней средой, структура которой такова, что ее решение может быть получено в квадратурах.

Так, из уравнения (12) и граничного условия (2)₁ получаем выражение для перемещения вдоль оси стержня

$$\bar{u}_I = \frac{\bar{\kappa}_{30}}{\bar{\lambda}} \bar{u}_2 \bar{s}, \quad (15)$$

а из (13) для перемещения

$$\bar{u}_3 = \frac{\bar{\kappa}_{30}^2}{\bar{\kappa}_{10}\bar{\lambda}} \bar{u}_2 \bar{s}. \quad (16)$$

В (15) и (16) безразмерные координата \bar{s} и компоненты перемещения \bar{u}_I, \bar{u}_2 отнесены к радиусу R , а безразмерные кручение $\bar{\kappa}_{10}$, кривизна $\bar{\kappa}_{30}$ и параметр $\bar{\lambda}$ определяются как

$$\bar{\kappa}_{10} = \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\bar{\kappa}_{30} = \cos^2 \alpha, \quad \bar{\lambda} = \cos \alpha.$$

Из уравнения (14), с учетом формулы (16), определяем угол

$$\vartheta_2 = -\frac{\bar{\kappa}_{30}}{\bar{\kappa}_{10}} \bar{u}_2, \quad (17)$$

который не зависит от s .

Учитывая, что моменты в стержне пропорциональны изменениям кручения и кривизны $M_i = A_{ii}(\kappa_i - \kappa_{i0})$, а также формулы (1), приводим уравнение (9) к виду

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} \bar{\lambda} + \frac{\bar{\kappa}_{30}^2}{\bar{\kappa}_{10}} \left(1 + \bar{u}_2 - \frac{1}{1 - \bar{u}_2} \right) = 0 \quad (18)$$

Величина, стоящая в скобках, при степени обжатия $\bar{u}_2 = 0.1, 0.05, 0.01$ составляет соответственно $-0.011, -2.632 \cdot 10^{-3}, -1.01 \cdot 10^{-4}$ и, следовательно, ею можно пренебречь, в связи с чем (18) упрощается

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} = 0,$$

а его решение, в силу граничного условия (2)₃, тривиально

$$\vartheta_1 = 0. \quad (19)$$

Далее из (9) – (11), учитывая формулы (17), (19), определяем внутренние моменты

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \frac{M_1 R}{A_{11}} = \frac{\bar{\kappa}_{30}^2}{\bar{\kappa}_{10}} \bar{u}_2, \quad M_2 = 0, \\ \bar{M}_3 &= \frac{M_3 R}{A_{33}} = -\bar{\kappa}_{30} \bar{u}_2, \end{aligned} \quad (20)$$

а безразмерный расчетный момент, вычисляемый по критерию Треска – Сен-Бенана, определяем по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{pac} &= \frac{M_{pac} R}{A_{33}} = \\ &= \frac{\bar{\kappa}_{30}}{\bar{\kappa}_{10}} \bar{u}_2 \sqrt{\bar{\kappa}_{30}^2 + \eta^2 \bar{\kappa}_{10}^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\eta = A_{33}/A_{11}$.

Из уравнения (7) определяем перерезывающую силу, дей-

ствующую вдоль бинормали

$$\begin{aligned} \bar{Q}_3 &= \frac{Q_3 R^2}{A_{11}} = \\ &= \frac{\bar{\kappa}_{30}}{\bar{\kappa}_{10}} (\kappa_{30}^2 + \eta \kappa_{10}^2) \bar{u}_2, \end{aligned} \quad (22)$$

а из уравнений (8) и (5) следует, что перерезывающая сила вдоль главной нормали и распределенная нагрузка, действующая вдоль бинормали, отсутствуют

$$Q_2 = 0, \quad q_3 = 0. \quad (23)$$

Приводя (3) и (4) к безразмерной форме, имеем

$$\frac{d\bar{Q}_1}{ds} \bar{\lambda} + \bar{q}_1 = 0, \quad (24)$$

$$\bar{\kappa}_{30} \bar{Q}_1 - \bar{\kappa}_{10} \bar{Q}_3 + \bar{q}_2 = 0, \quad (25)$$

где

$$\bar{Q}_1 = \frac{Q_1 R^2}{A_{11}},$$

$$\bar{q}_1 = \frac{q_1 R^3}{A_{11}}, \quad \bar{q}_2 = \frac{q_2 R^3}{A_{11}}$$

являются соответственно продольной силой и компонентами распределенной нагрузки в безразмерной форме.

Система уравнений (24), (25) содержит три неизвестных и потому является неопределенной. Чтобы исключить эту неопределенность, воспользуемся гипотезой Кулона, согласно которой сила трения винтового стержня об оболочку пропорциональна силе нормального давления и всегда направлена противоположно перемещению.

Очевидно, что силой трения является компонента q_1 и поэтому закон Кулона в безразмерной форме

$$\bar{q}_1 = f \bar{q}_2, \quad (26)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Першин В.В., Черданцев С.В., Игнатов Е.В. К решению системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих работу винтовой пространственной крепи //Вестн.КузГТУ, 1998, №5. С.11–13.
- Светлицкий В.А. Механика стержней. – М.: Высшая школа . – 1987. – 320 с.

□ Автор статьи:

Черданцев

Сергей Васильевич

– канд. техн. наук, доц. каф. строительства подземных сооружений и шахт

где f – коэффициент трения стержня об оболочку.

Поскольку сила трения q_1 противоположна перемещению u_1 , то в уравнении (24) ее следует принять отрицательной. В силу сказанного, приведем систему уравнений (24) – (25) к одному уравнению

$$\frac{d\bar{Q}_1}{ds} + \beta \bar{Q}_1 - \delta = 0, \quad (27)$$

в котором

$$\beta = \frac{f \bar{\kappa}_{30}}{\bar{\lambda}}, \quad \delta = \frac{f \bar{\kappa}_{10}}{\bar{\lambda}} \bar{Q}_3.$$

Так как концы стержня не закреплены, то продольная сила в концевых сечениях равна нулю

$$\bar{Q}_1(0,5l) = 0. \quad (28)$$

Выражение (28) является граничным условием для уравнения (27), решение которого в этом случае будет таким

$$\bar{Q}_1 = \frac{\delta}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(\bar{s}-0,5l)} \right). \quad (29)$$

Далее из уравнения (24) определяем распределенную нагрузку

$$\bar{q}_1 = \bar{\lambda} \beta e^{-\beta(\bar{s}-0,5l)}, \quad (30)$$

а нагрузку \bar{q}_2 определяем из формулы (26)

$$\bar{q}_2 = \bar{\kappa}_{10} \bar{Q}_3 e^{-\beta(\bar{s}-0,5l)}. \quad (31)$$

Выражения (15) - (17), (19) - (23), (29) - (31) представляют собой решение линейной краевой задачи о равновесии винтового стержня, обжатого внешней средой, и позволяют исследовать его напряженно-деформированное состояние.