ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519. 21

А.В. Бирюков, П.А. Бирюков

РАЗМЕРНОСТЬ ГРАФОВ

Под расстоянием $d(x,y)$ между вершинами x и y в связном графе будем понимать длину кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Пусть $A=\{a_1, \ldots, a_k\}$ - упорядоченное подмножество вершин графа G. Код вершины x относительно множества A – это последовательность $d(x,a_1), \ldots, d(x,a_k)$. Множество A есть базис графа G, если любые две различные вершины имеют различные коды относительно A. Наименьшее число вершин, образующих базис графа G, называется его размерностью [1].

Простые цепи (и только они) имеют размерность 1. Примерами графов размерности 2 являются простые циклы и решетки. Размерность полного графа порядка n равна $n-1$. Полный двудольный граф $K_{m,n}$ имеет размерность $m+n-2$.

Граф выпуклого многогранника в трехмерном евклидовом пространстве может иметь любую размерность $k>1$. Например, можно показать, что размерность графа n–угольной пирамиды равна $[(2n+2)/5]$ для всех $n\neq 3, 6$ и равна 3 для $n=3, 6$.

Выпуклый многогранник называется однородным или полуправильным, если его группа симметрий действует транзитивно на вершинах. Класс однородных многогранников состоит из двух бесконечных семейств – призм и антипризм, пяти правильных многогранников и тринадцати архимедовых многогранников [2]. Графы призм и правильных многогранников имеют размерность 3.

Аналогичные факты установлены нами также для некоторых антипризм и для двух архимедовых многогранников – усеченного тетраэдра и кубооктаэдра. Эти результаты подтверждают нашу гипотезу о том, что размерность графа любого однородного многогранника равна 3.

Пусть G – граф порядка n, диаметра d и размерности k. Код любой вершины, не входящей в базис, есть последовательность натуральных чисел $d_1, \ldots, d_k$, где $1\leq d_i\leq d$, поэтому $n\leq d^k+k$.

Если $k>1$, то равенство $n=d^k+k$ может выполняться только при $d\leq 3$. Действительно, из этого равенства следует, что любая последовательность $d_1, \ldots, d_k$, удовлетворяющая условию $1\leq d_i\leq d$, является кодом некоторой вершины графа G. В частности, вершина с кодом 1, … , 1 смежна со всеми базисными вершинами $a_1, \ldots, a_k$; поэтому $d(a_i,a_j)\leq 2$ для всех i,j. С другой стороны, существует вершина x, для которой $d(x,a_1)=d$ и $d(x,a_1)=1$. Тогда $d\leq d(a_i,a_j)+1\leq 3$.

Для любого k построим граф размерности k и диаметра 2, имеющий максимальный возможный порядок $n=d^k+k$. Пусть G – граф с множеством вершин $A\cup B$, где A – полный подграф порядка k и B – полный подграф порядка 2^k, причем каждая вершина $x\in B$ смежна с вершинами из множества $F(x\subset A)$, где F - биективное отображение множества B на семейство всех подмножеств множества A. Легко проверить, что A – базис наименьшей мощности в графе G.

Было бы интересно найти общий метод построения графов размерности k, диаметра 3 и порядка 3^k+k. Отметим, что существуют несколько неизоморфных графов размерности 2, диаметра 3 и порядка $11=3^2+2$. .

Любой связный регулярный граф степени 2 является простым циклом и поэтому имеет размерность 2. В то же время существуют кубические графы сколь угодно большой размерности.

Рассмотрим на плоскости множество $V=V_0\cup V_1\cup\ldots\cup V_r$, где V_0 состоит из одной точки (0,0) и $V_j=\{(i,j) : i=0, 1, \ldots, 3\cdot 2^{j-1}\}$ для $j=1,2, \ldots, r$. Точки множества V_j назовем вершинами ранга j.

Обозначим через G_r граф с множеством вершин V, в котором вершина (0,0) смежна с тремя вершинами ранга 1, каждая вершина (i,j) ранга j смежна с вершинами $(2i-1, j+1)$ и $(2i, j+1)$ ранга $j+1$ для $j=1, \ldots, r-1$, а вершины (i,r) ранга r образуют простой цикл (в порядке возрастания I).

Этот кубический граф имеет порядок $n=3\cdot 2^r-2$ и диаметр $d=2r$ (при $r>2$).Для его размерности k из неравенства $n\leq d^k+k$ следует оценка $k\geq r / 2\log_2 r$.

Заметим, что граф G_r планарен и 3 – связен, следовательно, по теореме Штейница он является графом некоторого выпуклого многогранника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buczkowski P., Chartrand G., Poisson C., Zhang Ping.* Jn k-dimensional graphs fnd their bases. Ptrijd. math. hung. 2003, v. 46, 1, p. 9-15.
2. *Coxeter H.S.M.* Regular polytopes. N.Y.: Dover, 1973.

 Авторы статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт. техн.наук, проф., зав. каф.
высшей математики

Бирюков
Петр Альбертович
- канд.физ.-мат.наук, доц.каф.
алгебры и геометрии КемГУ

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ О МУЗЫКЕ

Применение статистического анализа в гуманитарных исследованиях и, в частности, в языкознании широко известно. В меньшей степени это относится к изучению музыкального творчества, где первые работы появились лишь в середине прошлого века [1-3] .

Неожиданным открытием в филологии явился закон Ципфа [4] , математическая формулировка которого имеет вид:

$$FR=1 / \ln(1.78 \cdot N) ,$$

где F - относительная частота слова в данном тексте; R - ранг слова, т. е. номер его места в списке слов, расположенных в порядке убывания относительной частоты их употребления; N - общее количество различных слов в тексте.

В общем виде степенной закон гиперболического типа можно представить формулой

$$FR^m=C ,$$

где m - положительный параметр, а C - некоторая константа.

Для закона Ципфа $m=1$, $C=1 / \ln (1.78 \cdot N)$. Константа здесь обладает малой вариацией и при значениях N в интервале $(10^3,10^4)$ изменяется от 0,08 до 0,06 со средним значением 0,07.

В анализе музыкальных произведений с позиций закона Ципфа ограничимся мелодиями, для записи которых используются ноты одной октавы без наличия полутонов. При этом словами будем считать 7 нот октавы, занумерованные в порядке их следования числами от 1 до 7. Тогда $N=7$ и, следовательно, $FR=0.4$.

Рассмотрим следующие мелодии, удовлетворяющие названным ограничениям: 1) «Огонек» М. Блантера; 2) «В землянке» К. Листова; 3) «По долинам и по взгорьям» Д. Покрасса; 4) «Меланхолическая серенада» П. Чайковского; 5) «Сурок» Л. Бетховена; 6) «Колыбельная» В. Моцарт; 7) «Мельник» Ф. Шуберта.

Результаты анализа приведены в таблице, где L - общее число нот мелодии, $\overline{FR}$ - среднее значение произведения, E - размах значений FR

Таблица

L	56	72	30	32	67	56	50
$\overline{FR}$	0,39	0,41	0,36	0,38	0,39	0,37	0,40
E	0,05	0,06	0,03	0,03	0,04	0,04	0,03

Проверка этих результатов по критерию Диксона показывает, что с вероятностью 0,99 различие между средними значениями $\overline{FR}$ случайно. Поэтому константу C можно считать равной среднему из чисел $\overline{FR}$, т. е. равной 0,39, что практически совпадает с расчетным значением 0,40.

Проведенный анализ свидетельствует о правомерности закона Ципфа для музыкальных произведений в рамках сформулированных выше ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinkerton R.* Information theory and melody. Scient. Amer. 194, № 2, 1956.
2. *Coden I.* Information theory and music. Behak. Sei., 7, № 2, 1962.
3. *Заринов Р.Х* Кибернетика и музыка. М.: Наука, 1971.
4. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

 Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт. техн.наук, проф.,
зав. каф. высшей математики