

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

**УДК 519.21**

**А.С.Сорокин**

### **АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА (ОЦЕНКА КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ)**

Известно, что всякая марковская модель системы технического обслуживания описывается системой дифференциальных уравнений [1, 2]:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_{ki} P_i(t), k = 1, \dots, n . \quad (1)$$

В системе (1) последовательным исключением функций  $P_i(t)$ ,  $i=2, \dots, n$  получаем уравнение резольвенты для функции  $P_1(t)$ :

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k P_1(t)}{dt^k} = f(t) . \quad (2)$$

Тогда имеет место структурная формула решения уравнения (2) [3]:

$$P_1(x) = \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n \left[ \prod_{j=1, j \neq i}^n (r_i - r_j) \right]^{-1} e^{r_i(x-t)} f(t) dt \quad (3)$$

Проиллюстрируем этот алгоритм на примере, взятом из статьи Рыбалко В.В. [4].

Система дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= -P_1(t)(\lambda_{14} + \lambda_{12}) + P_3(t)\mu_{31} + \\ &+ P_4(t)\mu_{41} + P_5(t)\mu_{51} + P_6(t)\mu_{61}; \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= -P_2(t)(\lambda_{23} + \lambda_{24} + \lambda_{26}) + P_1(t)\lambda_{12}; \\ \frac{dP_3(t)}{dt} &= -P_3(t)(\lambda_{35} + \mu_{31}) + P_2(t)\lambda_{23}; \\ \frac{dP_4(t)}{dt} &= -P_4(t)(\lambda_{45} + \mu_{41}) + P_1(t)\lambda_{41} + P_2(t)\lambda_{24}; \\ \frac{dP_5(t)}{dt} &= -P_5(t)\mu_{51} + P_3(t)\lambda_{35} + P_4(t)\lambda_{45}; \\ \frac{dP_6(t)}{dt} &= -P_6(t)\mu_{61} + P_2(t)\lambda_{26}. \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия:  $P_1(0)=1$ ,  $P_k(0)=0$ ,  $k=2, \dots, 6$ .

При значениях параметров

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.012; \lambda_{23} = 0.2; \lambda_{14} = 0.02; \\ \lambda_{26} &= 0.004; \lambda_{24} = 0.2; \lambda_{45} = 0.2; \lambda_{35} = 0.0056; \\ \mu_{61} &= 0.004; \mu_{31} = 0.05; \\ \mu_{51} &= 0.05; \mu_{41} = 0.02. \end{aligned}$$

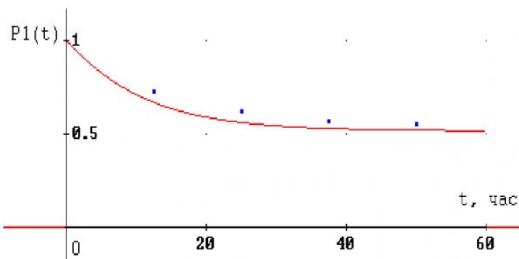
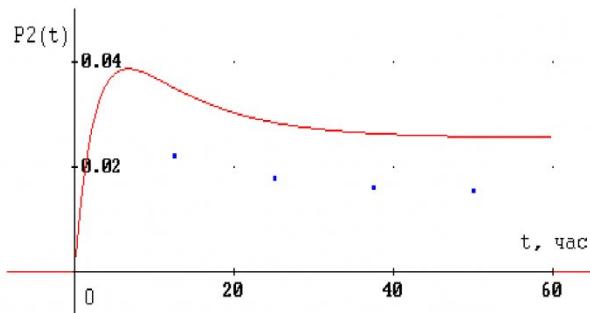
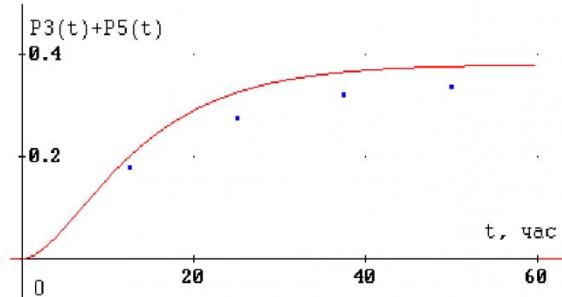
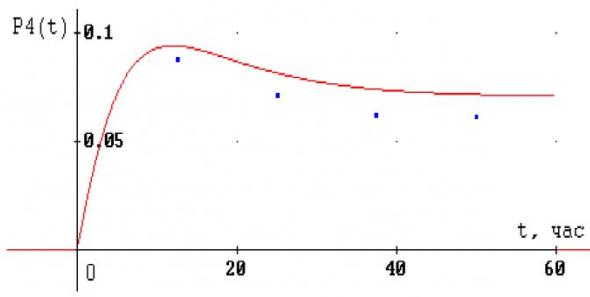
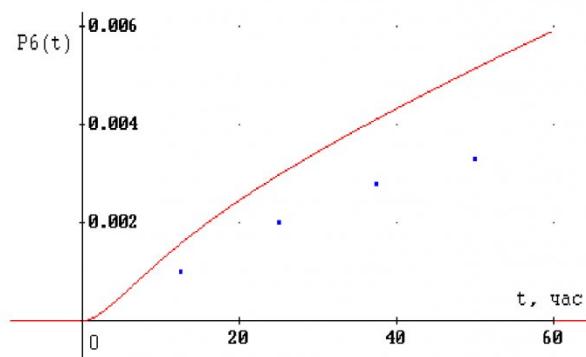
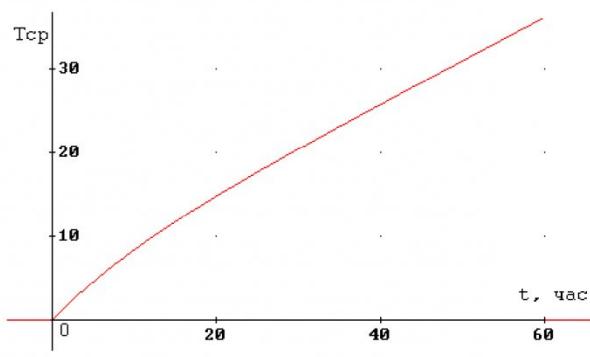
система (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= -0.04P_1(t) + 0.05P_3(t) + \\ &+ 0.02P_4(t) + 0.05P_5(t) + 0.004P_6(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= -0.404P_2(t) + 0.02P_1(t); \\ \frac{dP_3(t)}{dt} &= -0.0556P_3(t) + 0.2P_2(t); \\ \frac{dP_4(t)}{dt} &= -0.22P_4(t) + 0.02P_1(t) + 0.2P_2(t); \\ \frac{dP_5(t)}{dt} &= -0.05P_5(t) + 0.0056P_3(t) + 0.2P_4(t); \\ \frac{dP_6(t)}{dt} &= -0.004P_6(t) + 0.004P_2(t). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^6 P_i(t) = 1$$

Решая систему (5), получаем базис Грёбнера [5, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{d^5 P_1(t)}{dt^5} &= -0.04 \frac{d^4 P_1(t)}{dt^4} + \frac{d^3 P_1(t)}{dt^3} + \\ &+ 39232 \cdot 10^{-8} \frac{d^2 P_1(t)}{dt^2} - 13549 \cdot 10^{-7} \frac{dP_1(t)}{dt} + \\ &+ 42436 \cdot 10^{-9} P_1(t) - 61321 \cdot 10^{-8} P_2(t) + \\ &+ 3125 \cdot 10^{-11} P_3(t) + 9058 \cdot 10^{-8} P_4(t) + \\ &+ 3125 \cdot 10^{-11} P_5(t) + 1024 \cdot 10^{-15} P_6(t); \\ \frac{d^4 P_1(t)}{dt^4} &= -0.04 \frac{d^3 P_1(t)}{dt^3} + 0.0004 \frac{d^2 P_1(t)}{dt^2} + \\ &+ 39232 \cdot 10^{-8} \frac{dP_1(t)}{dt} - 13549 \cdot 10^{-8} P_1(t) + \\ &1715 \cdot 10^{-6} P_2(t) - 625 \cdot 10^{-8} P_3(t) + \\ &+ 406 \cdot 10^{-6} P_4(t) + \frac{1}{16} \cdot 10^{-4} P_5(t) - \\ &- 256 \cdot 10^{-12} P_6(t); \\ \frac{d^3 P_1(t)}{dt^3} &= 0.04 \frac{d^2 P_1(t)}{dt^2} + 0.0004 \frac{dP_1(t)}{dt} + \\ &+ 39232 \cdot 10^{-8} P_1(t) - 50425 \cdot 10^{-7} P_2(t) + \\ &+ 125 \cdot 10^{-6} P_3(t) - 1732 \cdot 10^{-6} P_4(t) + \\ &+ 125 \cdot 10^{-6} P_5(t) + 64 \cdot 10^{-10} P_6(t); \end{aligned}$$

Рис.1. Вероятность состояния  $P_1(t)$ Рис. 2. Вероятность состояния  $P_2(t)$ Рис. 3. Вероятность состояния  $P_3(t) + P_5(t)$ Рис. 4. Вероятность состояния  $P_4(t)$ Рис. 5. Вероятность состояния  $P_6(t)$ Рис. 6. Среднее время безотказной работы  $T_{cp}(t)$ 

$$\frac{d^2 P_1(t)}{dt^2} = -0.04 \frac{dP_1(t)}{dt} + 0.0004 P_1(t) + \\ + 14 \cdot 10^{-3} P_2(t) - 0.0025 P_3(t) + \quad (6)$$

$$0.0056 P_4(t) - 0.0025 P_5(t) - 16 \cdot 10^{-6} P_6(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -0.04 P_1(t) + 0.05 P_3(t) +$$

$$+ 0.02 P_4(t) + 0.00 P_5(t) + 0.0004 P_6(t);$$

$$\sum_{i=1}^6 P_i(t) = 1$$

Исключив из системы (6) функции  $P_i(t)$ ,  
 $i=2, \dots, 6$ , получим уравнение резольвенты для  
функции  $P_1(t)$ :

$$\frac{d^4 P_1(t)}{dt^4} + 0.718 \frac{d^3 P_1(t)}{dt^3} + 0.1495 \frac{d^2 P_1(t)}{dt^2} + \\ + 917 \cdot 10^{-5} \frac{dP_1(t)}{dt} + 35 \cdot 10^{-6} P_1(t) - \quad (7) \\ - 17776 \cdot 10^{-9} = 0.$$

Характеристическими числами уравнения (7) являются:

$$r_1 = -0.004, \quad r_2 = -0.209, \quad r_3 = -0.102, \\ r_4 = -0.400.$$

Тогда с помощью структурной формулы (3) получаем явное аналитическое решение системы (5) в виде:

$$P_1(t) = 0.0120 \cdot e^{r_1 t} - 0.076 \cdot e^{r_2 t} + 0.560 \cdot e^{r_3 t} - \\ - 0.0029 \cdot e^{r_4 t} + 0.506;$$

$$P_2(t) = 0.0006 \cdot e^{r_1 t} - 0.0077 \cdot e^{r_2 t} + 0.037 \cdot e^{r_3 t} - \\ - 0.055 \cdot e^{r_4 t} + 0.025;$$

$$P_3(t) + P_5(t) = 0.0099 \cdot e^{r_1 t} + 0.37 \cdot e^{r_2 t} - \\ - 0.75 \cdot e^{r_3 t} - 0.003 \cdot e^{r_4 t} + 0.375;$$

$$P_4(t) = 0.0017 \cdot e^{r_1 t} - 0.288 \cdot e^{r_2 t} + 0.157 \cdot e^{r_3 t} + \\ + 0.06 \cdot e^{r_4 t} + 0.069;$$

$$P_6(t) = -0.024 \cdot e^{r_1 t} + 0.00015 \cdot e^{r_2 t} - \\ - 0.0015 \cdot e^{r_3 t} + 0.00055 \cdot e^{r_4 t} + 0.025.$$

На рис. 1-5 показаны аналитические решения  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ ,  $P_3(t) + P_5(t)$ ,  $P_4(t)$ ,  $P_6(t)$ . Точками указаны данные, полученные В.В. Рыбалко [4] численно методом Рунге-Кутта.

Известно, что интеграл от вероятности работоспособного состояния  $P_1(t)$ , взятый по интервалу от нуля до времени, соответствующего её стационарному значению, дает среднее время безотказной работы системы:

$$T_{cp}(t) = -2.94 \cdot e^{r_1 t} + 0.36 \cdot e^{r_2 t} - \\ - 5.52 \cdot e^{r_3 t} + 0.007 \cdot e^{r_4 t} + 0.506 \cdot t + 8.086. \quad (8)$$

На рис. 6 показана аналитическая оценка  $T_{cp}(t)$ .

Функционал, характеризующий качество функционирования системы, вычисляется из

$$J(t) = Q(t)/R(t), \quad (9)$$

где

$$Q(t) = -2.94 \cdot e^{r_1 t} + 0.36 \cdot e^{r_2 t} - 5.52 \cdot e^{r_3 t} + \\ + 0.007 \cdot e^{r_4 t} + 0.506 \cdot t + 8.086,$$

$$R(t) = 2.94 \cdot e^{r_1 t} - 0.36 \cdot e^{r_2 t} + 5.52 \cdot e^{r_3 t} - \\ - 0.007 \cdot e^{r_4 t} + 0.494 \cdot t - 8.086.$$

На рис. 7 показано аналитическое решение  $J(t)$ . Максимальное значение функционала  $J(t)$  достигается при  $t=0.59$  и равно 46.7.

Отметим, что функционал (9), характеризующий качество функционирования системы, с помощью (8) преобразуется к виду:

$$J(t) = \frac{T_{cp}(t)}{t - T_{cp}(t)}. \quad (10)$$

Представление (10) зависит как от среднего времени безотказной работы  $T_{cp}(t)$ , так и от времени работы  $t$ .

На рис. 8 показано аналитическое решение  $J(t)$  в зависимости от среднего времени безотказной работы  $T_{cp}(t)$  и от времени работы  $t$ .

Преобразуем функционал (10) к виду:

$$J(t) = \frac{\tau_{cp}(t)}{1 - \tau_{cp}(t)},$$

где

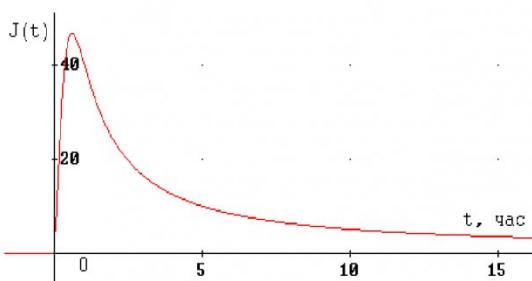


Рис. 7. Качество функционирования системы  $J(t)$

$$\tau_{cp}(t) = \frac{T_{cp}(t)}{t}.$$

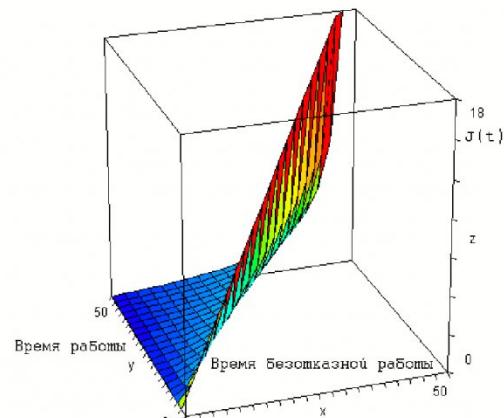


Рис. 8. Качество функционирования системы  $J(t)$  как функционала среднего времени безотказной работы  $T_{cp}(t)$  и времени работы  $t$

На рис. 9 показано аналитическое решение  $J(t)$  в зависимости от относительного среднего времени безотказной работы  $T_{cp}(t)/t$ .

Таким образом, на приведенном примере показано, что система уравнений Колмогорова, характеризующая состояние объекта, имеет всегда единственное аналитическое решение и позволяет

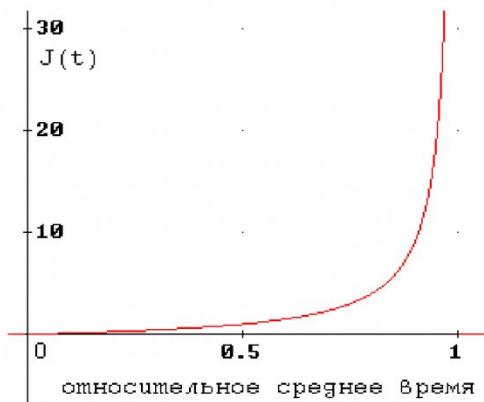


Рис. 9. Качество функционирования системы  $J(t)$  в зависимости от относительного среднего времени безотказной работы  $T_{cp}(t)/t$

производить оценку качества системы технического обслуживания объекта.

Отметим, что предложенный эффективный алгоритм расчета относительного времени пребывания системы технического обслуживания в работоспособном состоянии не требует составления отдельной программы и легко реализуется в любом символьном математическом пакете.

Все символьные выкладки данной работы выполнены в пакете DERIVE 5.05. Заметим, что приведенный эффективный алгоритм легко может быть реализован также и в пакете MAPLE 9.5.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. - М. 1964. 576 с.
2. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. Пер. с нем. -М.: Радио и связь, 1988. 392 с.
3. Сорокин А. С. Структурные формулы некоторых классов аналитических функций в конечносвязной области // Матем. сб. 1997. Т. 188. №12. С. 107–134.
4. Рыбалко В. В. Оценка качества системы технического обслуживания энергетических объектов // Exponenta Pro. Математика в приложениях. -М.: 2003. №3. С. 58–61.
5. Сорокин А.С. Алгоритм решения систем уравнений Колмогорова (оценка качества системы технического обслуживания) // Труды Всероссийской научной конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». -М.: 2004. С. 389 –397.
6. Аладьев В.З., Шишаков М.Л. Автоматизированное рабочее место математика. -М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. 752 с.

□ Автор статьи:

Сорокин  
Андрей Семенович  
- канд. физ.-мат.наук, доцент,  
ст.н.с. (филиал КузГТУ  
в г. Новокузнецке)

**УДК 550.837**

**Н.В. Трушникова**

### ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОРМЫ ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА В МАССИВЕ ПО ИЗМЕРЕННОМУ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМУ ПОТЕНЦИАЛУ НА ПОВЕРХНОСТИ

Одной из задач электрометрического контроля состояния горного массива является проблема локации подземных тепловых источников техногенного происхождения по данным измерения потенциала электрического поля (или его градиента) на дневной поверхности массива [1–3]. В работах [4,5] исследованы обратные задачи определения формы поверхности источника тепловыделения, в которых математические модели построены при следующих предположениях:

- 1) источник "локализован" в некоторой выпуклой замкнутой области  $D$  с неизвестной границей  $S$ ;
- 2) известны координаты, по крайней мере, одной точки  $M(0,0,-H) \in D$  [5];
- 3) горный массив - изотропная среда.

В данной работе рассматривается математическая модель для плоского случая, построенная с помощью логарифмического потенциала и сводящаяся к нелинейному интегральному уравнению первого рода. Для этой модели первое предположение необязательно, а для определения  $H > 0$  предлагается методика с использованием результатов [1, 3]. Также предлагается способ линеаризации изучаемого интегрального уравнения и алгоритм решения задачи на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова [6]. Пусть в плоскости  $(t,x)$  имеется аномалия, сосредоточенная в области  $D$ , которая создает

электростатическое поле с потенциалом  $\varphi(t,x)$  (вне области  $D$ ). При этом область  $D$  задается в виде:

$D = \{(t,x) : l_1 \leq t \leq l_2, -H \leq x \leq -H + x(\xi)\}$ ,

где  $x(\xi)$  - неизвестная функция, а горный массив расположен в полуплоскости  $x \leq 0$  ( $x=0$  - дневная поверхность) (рис.1).

С учетом третьего предположения и результатов [1] потенциал  $\varphi(t,x)$  записывается в виде:

$$\varphi(t,x) = \frac{\beta}{2\pi} \iint_D \ln \frac{1}{r} dS, \quad (1)$$

где  $\beta$  - эффективная плотность зарядов на границе  $x(\xi)$ ,  $r = \sqrt{(t - \xi)^2 + (x - \eta)^2}$ .

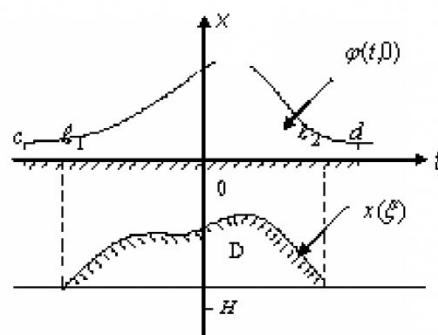


Рис. 1. Геометрическая интерпретация задачи