

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. - М. 1964. 576 с.
2. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. Пер. с нем. -М.: Радио и связь, 1988. 392 с.
3. Сорокин А. С. Структурные формулы некоторых классов аналитических функций в конечносвязной области // Матем. сб. 1997. Т. 188. №12. С. 107–134.
4. Рыбалко В. В. Оценка качества системы технического обслуживания энергетических объектов // Exponenta Pro. Математика в приложениях. -М.: 2003. №3. С. 58–61.
5. Сорокин А.С. Алгоритм решения систем уравнений Колмогорова (оценка качества системы технического обслуживания) // Труды Всероссийской научной конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». -М.: 2004. С. 389 –397.
6. Аладьев В.З., Шишаков М.Л. Автоматизированное рабочее место математика. -М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. 752 с.

□ Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат.наук, доцент,
ст.н.с. (филиал КузГТУ
в г. Новокузнецке)

УДК 550.837

Н.В. Трушникова

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОРМЫ ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА В МАССИВЕ ПО ИЗМЕРЕННОМУ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМУ ПОТЕНЦИАЛУ НА ПОВЕРХНОСТИ

Одной из задач электрометрического контроля состояния горного массива является проблема локации подземных тепловых источников техногенного происхождения по данным измерения потенциала электрического поля (или его градиента) на дневной поверхности массива [1–3]. В работах [4,5] исследованы обратные задачи определения формы поверхности источника тепловыделения, в которых математические модели построены при следующих предположениях:

- 1) источник "локализован" в некоторой выпуклой замкнутой области D с неизвестной границей S ;
- 2) известны координаты, по крайней мере, одной точки $M(0,0,-H) \in D$ [5];
- 3) горный массив - изотропная среда.

В данной работе рассматривается математическая модель для плоского случая, построенная с помощью логарифмического потенциала и сводящаяся к нелинейному интегральному уравнению первого рода. Для этой модели первое предположение необязательно, а для определения $H > 0$ предлагается методика с использованием результатов [1, 3]. Также предлагается способ линеаризации изучаемого интегрального уравнения и алгоритм решения задачи на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова [6]. Пусть в плоскости (t,x) имеется аномалия, сосредоточенная в области D , которая создает

электростатическое поле с потенциалом $\varphi(t,x)$ (вне области D). При этом область D задается в виде:

$D = \{(t,x) : l_1 \leq t \leq l_2, -H \leq x \leq -H + x(\xi)\}$,

где $x(\xi)$ - неизвестная функция, а горный массив расположен в полуплоскости $x \leq 0$ ($x=0$ - дневная поверхность) (рис.1).

С учетом третьего предположения и результатов [1] потенциал $\varphi(t,x)$ записывается в виде:

$$\varphi(t,x) = \frac{\beta}{2\pi} \iint_D \ln \frac{1}{r} dS, \quad (1)$$

где β - эффективная плотность зарядов на границе $x(\xi)$, $r = \sqrt{(t - \xi)^2 + (x - \eta)^2}$.

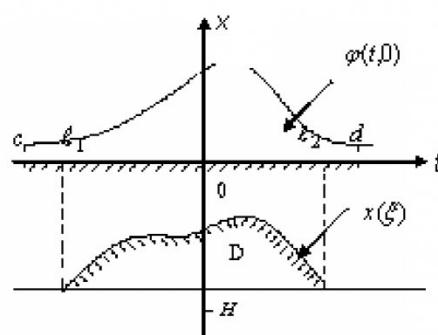


Рис. 1. Геометрическая интерпретация задачи

На дневной поверхности $x=0$, и из (1) имеем

$$\tilde{\varphi}(t,0) = -\frac{\beta}{4\pi} \int_{l_1}^{l_2} d\xi \int_{-H}^{-H+x(\xi)} \ln[(t-\xi)^2 + \eta^2] d\eta \quad (2)$$

где $x(\xi)$ - искомая функция, а $\tilde{\varphi}(t,0)$ - экспериментально измеряемая величина.

Вычисляя интеграл в правой части (2), получаем нелинейное интегральное уравнение для нахождения $x(\xi)$:

$$\tilde{\varphi}(t,0) = -\frac{\beta}{4\pi} \int_{l_1}^{l_2} R(t, \xi, x(\xi)) d\xi, \quad t \in [c, d] \quad (3)$$

где ядро уравнения может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} R(t, \xi, x(\xi)) &= (x(\xi) - H) \ln[a^2 + (x(\xi) - H)^2] + \\ &+ H \ln(H^2 + a^2) - 2(x(\xi) - \operatorname{arctg} \frac{H}{a}) + \\ &+ \operatorname{arctg} \frac{H - x(\xi)}{a}, \quad a = t - \xi. \end{aligned}$$

Отметим, что нелинейное интегральное уравнение вида (3) изучались многими авторами при решении обратных задач гравиметрии и теории потенциала с помощью регуляризующих алгоритмов (например, [6–8]). В данной работе предлагается способ, который основан на линеаризации уравнения (3), что позволило свести исходное уравнение к решению линейно-

$x(\xi), \text{ м}$

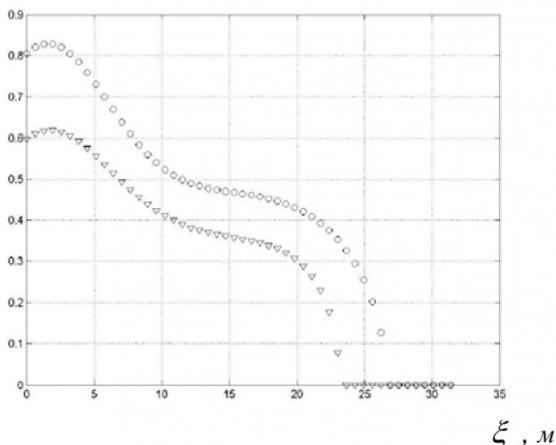


Рис. 2. Восстановление границы теплового источника $\tilde{x}(\xi)$, по измеренному потенциальному $\tilde{\varphi}(t,0)$: 1 ($\nabla \nabla \nabla$) — для профиля II-II, 2 ($\circ \circ \circ$) — для профиля III-III ($H \approx 4.5 \text{ м}$, $l_1 = 0 \text{ м}$, $l_2 = 32 \text{ м}$, $c = 0 \text{ м}$, $d = 35 \text{ м}$).

$\varphi(t,0), B$

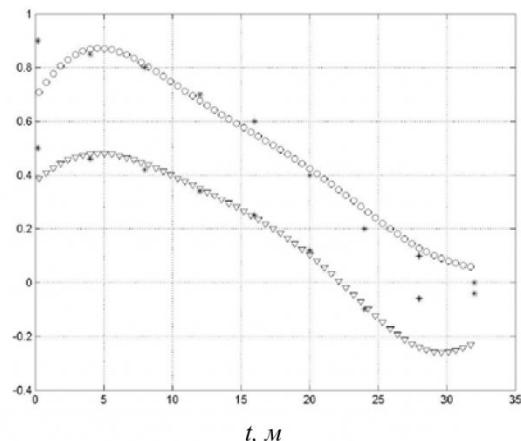


Рис.3. Распределение потенциала $\tilde{\varphi}(t,0)$ (* * *), измеренного экспериментально, и потенциала $\tilde{\varphi}_{выч}(t,0)$, вычисленного по найденному приближению $\tilde{x}(\xi)$: 1 ($\nabla \nabla \nabla$) — для профиля II-II, 2 ($\circ \circ \circ$) — для профиля III-III

го интегрального уравнения первого рода.

В предположении, что

$$\max_{\xi} \frac{|x(\xi)|}{H} \ll 1,$$

аппроксимируя второй интеграл в (2) квадратурой трапеций и используя приближение

$$\ln(1+z^*) \cong z^* - \frac{z^{*2}}{2} + o(z^{*2}),$$

где

$$|z_*| = \frac{|x^2(\xi) - 2x(\xi)|}{a^2 + H^2} \ll 1,$$

получаем линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\tilde{\varphi}(t,0) = -\frac{\beta}{4\pi} \int_{l_1}^{l_2} K(t, \xi) \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad (4)$$

где $\tilde{\varphi}(t,0)$ — потенциал электрического поля, измеряемый на дневной поверхности, а ядро уравнения имеет вид:

$$K(t, \xi) = \frac{1}{(t - \xi)^2 + H^2}.$$

После нахождения $\tilde{z}(\xi)$ из (4), искомое решение $x(\xi)$ — граница области D определяется из системы алгебраических уравнений вида

$$x^3(\xi_k) - 2Hx^2(\xi_k) = 2\tilde{z}(\xi_k), \quad k = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где N — задаваемое число точек разбиения отрезка $[l_1, l_2]$ при аппроксимации интеграла квадратурой прямоугольников с центральным узлом.

Заметим, что при использовании квадратур с

меньшей погрешностью аппроксимации (например, по Симпсону) и приближения

$$\ln(1+z^*) \approx \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{z^p}{(p+1)},$$

при $n > 2$ уравнения (4, 5) принимают более сложный вид. Для приближенного вычисления H из (5), был использован следующий прием.

Пусть t^* - точка измерения $\tilde{\varphi}(t,0)$, в которой $\tilde{\varphi}(t^*,0) \cong \varphi_{\text{фон}}$. Здесь $\varphi_{\text{фон}}$ - значение фона электрического поля над дневной поверхностью (согласно [1], $\varphi_{\text{фон}} \cong 15 \text{ Мв}$). Тогда, используя результаты [3], нетрудно получить следующую формулу:

$$H \cong \frac{t^* |\Delta\Phi|}{\sqrt{1 - (\Delta\Phi)^2}}, \quad (6)$$

где $\Delta\Phi = \frac{\varphi_{\text{фон}}}{\varphi_{\text{max}}} , \varphi_{\text{max}} = \tilde{\varphi}(0,0)$.

Так как рассматриваемая обратная задача (2), а также уравнение (4) некорректны по Адамару, то для численного решения целесообразна регуляризация по Тихонову [6-8]. Для решения уравнения (4) использовался вариационный ал-

горитм регуляризации с выбором параметра регуляризации по невязке [6], реализованный программно в среде MATLAB (аналог программы также выполнен на языке PASCAL 7.0). С помощью приведенной методики обработаны экспериментальные данные, полученные Г.В. Кролем и опубликованные в [1]. На рис. 2,3 приведены результаты расчетов: приближения $\tilde{x}(\xi)$ - искомой границы источника тепловыделения, с последующим вычислением потенциала $\tilde{\varphi}_{\text{выч}}(t,0)$, соответствующие измерениям потенциала $\tilde{\varphi}(t,0)$ по профилям II-II и III-III [1, стр. 115]. Экспериментальные данные были аппроксимированы многочленами методом наименьших квадратов.

Полученные результаты аппроксимируют геометрические характеристики источника тепловыделения в горном массиве только в двух сечениях. Для определения геометрических размеров трехмерного источника тепловыделения, следует применять модель из [5], что требует соответствующего массива экспериментальных данных.

Автор выражает глубокую признательность профессору Алексееву Д.В. за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарасов Б.Г., Дырдин В.В., Иванов В.В., Фокин А.Н. Физический контроль массивов горных пород – М.: Недра, 1994, 240 с.
2. Алексеев Д.В., Егоров П.В. Механизм формирования квазистационарного электрического поля в массиве горных пород при наличии естественных и техногенных тепловых источников// ФТПРПИ, 1994, № 5, с. 3–7.
3. Алексеев Д.В., Трушникова Н.В. Теоретические основы локации тепловых источников в массиве горных пород по измерениям электрического потенциала на поверхности // Совершенствование технологических процессов при разработке месторождений полезных ископаемых. Сб. научных тр. № 13, Кемерово, 1998, с. 110–115.
4. Алексеев Д.В., Трушникова Н.В. Об алгоритме определения границ теплового источника в массиве горных пород по результатам измерения потенциала электрического поля на дневной поверхности // Совершенствование технологических процессов при разработке месторождений полезных ископаемых. – Кемерово, НТЦ "Кузбассуглетехнология", 1999, с. 77–84.
5. Трушникова Н.В. Об определении формы объемного теплового источника в массиве горных пород по измерениям электрического потенциала на поверхности // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли. Труды международной конференции. – Новосибирск: Изд-во ИГД СО РАН, 2001, с. 165–167.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач – М.: Наука, 1979, 285 с.
7. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989, 127 с.
8. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеринбург: УИФ, «Наука», 1993, 263 с.

□ Автор статьи:

Трушникова
Надежда Васильевна
– ст.преп. каф. высшей математики