

УДК 519.8

С. Н. Астраков

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ ВЗАИМООТНОШЕНИЙ НА ГРАФАХ

В данной работе рассматриваются модели, в которых каждый участник системы «оценивает» отношения со всеми своими соседями и принимает решение об изменении отношений с ними.

1. Предварительные сведения

Пусть имеется граф $G(V,E)$ с множеством вершин $v \in V$ и множеством дуг $(i,j) \in E$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Будем рассматривать полный граф G , когда между каждой парой вершин существуют отношения, определяемые величинами x_{ij} и x_{ji} . Величина x_{ij} характеризует воздействие v_i на v_j , а величина x_{ji} - воздействие v_j на v_i . Таким образом, на графе $G(V,E)$ определено состояние $X = (x_{ij})$, в виде квадратной матрицы порядка n . Заметим, что ограничение на полноту графа можно в дальнейшем снять и расширить область применения полученных ниже методов.

Предположим, что состояния системы $X^{(k)}$ меняются в режиме дискретного времени $k=0, 1, 2, \dots$, перестраивая свои отношения $x_{ij}^{(k)}$ по определенным правилам. Будем считать, что каждая вершина v_i переопределяет выгодным для себя образом свой исходный потенциал q_i , сохраняя его на каждом шаге, т. е.

$$q_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

С другой стороны, вершина v_i испытывает на себе суммарное воздействие

$$p_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n x_{ji}^{(k)},$$

направленное от других элементов и меняющееся в течение времени k .

Меняя свои состояния $X^{(k+1)} = \Phi(X^{(k)})$, система может стремиться к устойчивым или циклическим решениям, поиск которых представляется весьма интересным. В данной работе рассматривается класс взаимодействий, определяемых стратегией "участников", и изучается характер меняющихся состояний $X^{(k)}$, в том числе при $k \rightarrow \infty$.

Интересы участника i с участником j определяются взаимными отношениями x_{ij} и x_{ji} . Вполне уместна оценка полезности отношений функциями вида

- 1) $c_{ij} = c(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ij} + x_{ji}$ (сотрудничество),
- 2) $c_{ij} = c(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ij} - x_{ji}$ (противостояние).

Эти случаи достаточно подробно рассматривались, соответственно, в работах [1,2]. Здесь мы рассмотрим общий линейный случай оценки отношений:

$$c_{ij} = c(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}.$$

Возможные значения весовых коэффициентов могут отражать как степень, так и полезность отношений. Представляется естественной следующая стратегия участников:

$$\min_j (ax_{ij} + bx_{ji}) \rightarrow \max_{x_{ij}}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Участник v_i на шаге $(k+1)$ принимает решение, основываясь на действиях других участников на предыдущем шаге; поэтому

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(k+1)} &= ax_{ij}^{(k+1)} + bx_{ji}^{(k)} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n c_{ji}^{(k)} = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n ax_{ij}^{(k)} + \sum_{j=1}^n bx_{ji}^{(k)} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_{ij}^{(k+1)} = -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)} + \frac{b}{a} \sum_{j=1}^n x_{ji}^{(k)} \right),$$

или

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(k+1)} &= -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + \frac{1}{n-1} \left(q_i + \frac{b}{a} p_i^{(k)} \right) = \\ &\quad -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, \end{aligned}$$

где

$$f_i^{(k)} = \frac{1}{n-1} \left(q_i + \frac{b}{a} p_i^{(k)} \right), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Таким образом, на каждом шаге определен вектор стабилизации

$$F^{(k)} = \{f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_n^{(k)}\},$$

по изменению которого можно определить характер состояний $X^{(k)}$.

2. Постановка задачи

Пусть на графе $G(V,E)$ определены начальные отношения между вершинами:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12}^{(0)} & x_{13}^{(0)} & \dots & x_{1n}^{(0)} \\ x_{21}^{(0)} & 0 & x_{23}^{(0)} & \dots & x_{2n}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}^{(0)} & x_{n2}^{(0)} & x_{n3}^{(0)} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и заданы рекуррентные преобразования состояний системы:

$$\begin{cases} x_{ij}^{(k+1)} = -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, & i \neq j, \\ x_{ij}^{(k+1)} = 0, & i = j; \end{cases} \quad (1)$$

$$i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Необходимо определить свойства и характер изменения состояний $X^{(k)} = \left(x_{ij}^{(k)}\right)$ при различных a и b . Найти устойчивые состояния $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$, не меняющиеся после преобразования (1).

3. Основные теоретические результаты

Важным является то, что в условиях задачи выполняется свойство сохранения ресурса для каждой вершины:

$$q_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k+1)} &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(-\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + \frac{1}{n-1} \left(q_i + \frac{b}{a} p_i^{(k)} \right) \right) = \\ &= -\frac{b}{a} p_i^{(k)} + \frac{n-1}{n-1} \left(q_i + \frac{b}{a} p_i^{(k)} \right) = q_i. \end{aligned}$$

Опуская достаточно длинные доказательства, приведем основные результаты.

Лемма 1. Для координат вектора стабилизации $F^{(k)}$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n f_i^{(k)} = \frac{Q}{n-1} \left(1 + \frac{b}{a} \right),$$

где $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ - суммарный потенциал системы.

Лемма 2. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется следующее рекуррентное соотношение

$$f_i^{(k+1)} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \cdot f_i^{(k)} + c_i,$$

где

$$c_i = \frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \cdot \left(q_i \left(1 - \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{Q}{n-1} \right)$$

есть постоянная величина.

Лемма 3. В момент времени k для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется соотношение

$$f_i^{(k)} = z f_i^{(0)} + c_i (1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1}),$$

где

$$z = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a},$$

или, с учетом преобразования геометрической прогрессии,

$$\begin{aligned} f_i^{(k)} &= \\ &\left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \right)^k f_i^{(0)} + c_i \cdot \frac{(n-1)a}{b+(n-1)a} \left(1 - \left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \right)^k \right) \end{aligned}$$

Теорема 1. Для устойчивого поведения вектора стабилизации необходимо и достаточно выполнение условия:

$$|z| = |(b/a)/(n-1)| < 1 \quad \text{или} \quad |b/a| < n-1. \quad (2)$$

При этом условии предельные значения координат вектора стабилизации равны:

$$\begin{aligned} f_i^* &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(k)} = c_i \frac{(n-1)}{b+(n-1)a} = \\ &= \frac{a+b}{b+(n-1)a} \left(q_i \left(1 - \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{Q}{n-1} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2. В условиях рассматриваемой модели для решений системы выполняются следующие утверждения.

A. При условии (2) начальное решение системы, заданное соотношениями:

$$x_{ij}^* = \frac{1}{b+(n-1)a} \left(aq_i - bq_j + \frac{bQ}{n-1} \right). \quad (3)$$

является стационарным, т.е. не изменяется в течение дискретного времени k .

B. При условии $|a/b| < 1$ любое начальное решение системы в результате преобразований (1) при $k \rightarrow \infty$ стремится к решению (3).

Замечание 1. При некоторых a и b (в частности при $a=b$) решение системы стремится к двум предельным циклическим (нечетному и четному), зависящим от начальных условий, которые в среднем определяют устойчивое решение (3). Как показывают расчеты, цикличности можно избежать, если в стратегию «принятия решений» ввести свойство «исторической преемственности»:

$$\begin{cases} y_{ij}^{(k+1)} = -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, \\ x_{ij}^{(k+1)} = \alpha y_{ij}^{(k+1)} + (1-\alpha)x_{ij}^{(k)}, \\ \quad i \neq j, 0 < \alpha < 1; \\ x_{ij}^{(k+1)} = 0, i = j; \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{cases} \quad (4)$$

Замечание 2. В случае $1 < |a/b| < n-1$ имеется необычная ситуация: решение системы расходится при сходящемся векторе стабилизации. Условно это объясняется тем, что если «полезность» отношений обеспечивается в большей степени за счет партнера ($b > a$), но эти « злоупотребления» имеют несколько ограниченный характер ($a/b < n-1$), то «крах» системы наступает при достаточно продолжительной материальной обеспеченности участников системы.

4. Некоторые конкретные интерпретации и численные эксперименты

Рассмотрим примеры, на которых реализуются приведенные выше алгоритмы. При этом можно наглядно анализировать поведение систем с помощью численных решений. Кроме того, исходя из здравого смысла, можно корректировать алгоритм (например, для неполного графа) или ввести в стратегию принятия решения некоторые изменения.

4.1. Задача распределения средств на конкурентные взаимодействия.

Предположим, что три фирмы (политические партии) A_1, A_2, A_3 распределяют свои фиксирован-

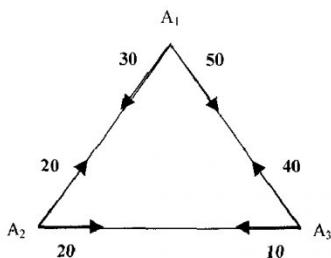


Рис. 1. Начальное состояние

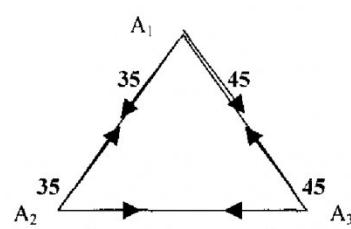


Рис. 2. Конечное устойчивое состояние

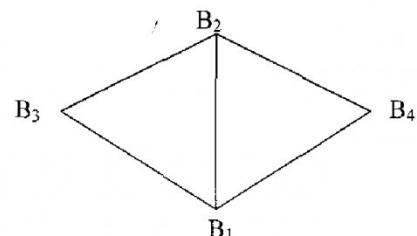


Рис. 3. Простая коммуникационная сеть

ные ресурсы $q_1=80$, $q_2=50$, $q_3=40$ друг против друга с целью улучшения своего конкурентного положения. Необходимо определить устойчивое состояние, устраивающее всех участников взаимодействия с точки зрения их интересов.

Покажем, что некоторое допустимое решение (не обязательно оптимальное) в результате преобразований будет приближаться к устойчивому решению. Степень близости к устойчивому решению будет определяться поведением вектора стабилизации $f=(f_1, f_2, f_3)$.

В данном случае имеется классический случай противостояния с оценкой отношений по формуле

$$c_{ij}=c(x_{ij}, x_{ji})=x_{ij} - x_{ji}$$

т.е. $a=1$, $b=-1$.

Рекуррентные соотношения (1) принимают вид:

$$\begin{cases} x_{ij}^{(k+1)} = -x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, & i \neq j, \\ x_{ij}^{(k+1)} = 0, & i = j; \\ i \in \{1, 2, 3\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Согласно лемме 2, $c_i=0$, $i=1, 2, 3$, поэтому

$$f_i^{(k+1)} = \frac{1}{2} f_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При начальном решении

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 30 \\ 40 & 0 & 10 \\ 20 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^{(0)} = (10; -10; 0).$$

имеется довольно сложная ситуация (см. рис 1): $x_{12}=50$, $x_{13}=30$, $x_{21}=40$, $x_{23}=10$, $x_{31}=20$, $x_{32}=20$. Первый участник «чувствует» себя уверенно по отношению ко второму и третьему участникам; третий участник создает угрозу второму (20 против 10).

После первого шага расчетного алгоритма (1) получаем

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 30 \\ 40 & 0 & 10 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^{(1)} = (5; -5; 0).$$

Первый и второй участники сохранили свои распределения, т.к. первый имел одинаково «хорошее» противостояние с соперниками, а второй – одинаково «плохое». Третий же участник логично перестроил взаимоотношения и сделал их паритетными.

После второго шага

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 35 \\ 45 & 0 & 5 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^{(2)} = (2.5; -2.5; 0).$$

«Запущенный» алгоритм аналогичным образом меняет состояние системы и на следующих шагах.

При $k \rightarrow \infty$ решение стремится к устойчивому, которое вычисляется по формулам (3):

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 35 \\ 45 & 0 & 5 \\ 35 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^* = (0; 0; 0).$$

Оно устраивает всех участников с точки зрения угроз (рис 2), т.к. все $c_{ij}=0$.

4.2. Задача об оптимальном обслуживании коммуникационных линий

Под понятием *коммуникационных линий* можно предполагать *транспортные сети*, *линии связи* и т.д. Обслуживание таких систем имеет ярко выраженный распределительный характер, когда конечные пункты (смежные вершины) принимают решения по распределению средств на функционирование инцидентных линий.

Для наглядности рассмотрим небольшую коммуникационную систему, состоящую из четырех вершин B_1 , B_2 , B_3 , B_4 (см. рис. 3), в которой отсутствует связь между B_3 и B_4 .

Ресурсы вершин, участвующих в обслуживании сети, зададим таблицей:

Вершины, B_i	B_1	B_2	B_3	B_4
Ресурсы, q_i	50	40	30	20

Заметим, что «периферийные» пункты B_3 и B_4 имеют меньше ресурса, чем «центральные» B_1 и B_2 .

Также, как и ранее, x_{ij} – доля ресурса, направленного от B_i и B_j , а c_{ij} – оценка «полезности» по данному направлению. Так как пара вершин совместно обслуживает свою линию, то уместно считать, что

$$c_{ij}=c_{ji}=x_{ij}+x_{ji},$$

т.е. $a=1$, $b=1$ для функции $c_{ij}=ax_{ij}+bx_{ji}$.

Интересы каждого участника состоят в том, чтобы содержать инцидентные линии на одинаково высоком уровне. Решается вопрос: можно ли в

процессе *саморазвития* системы справедливо распределить ресурсы на обслуживание линий, если каждый пункт принимает самостоятельное решение по распределению ресурса на каждом шаге?

Покажем, что некоторое начальное решение, например

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 & 10 \\ 10 & 0 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(0)} = (c_{ij}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 40 & 20 \\ 30 & 0 & 30 & 20 \\ 40 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в результате определенного алгоритма стремится к оптимальному (устойчивому) решению.

Учитывая, что степени вершин различны, сделаем корректировку преобразований:

$$\begin{cases} f_i^{(k)} = \frac{p_i^k + q_i}{d_i}, & i = 1 \div 4 \\ x_{ij}^{(k+1)} = -x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, & \forall (i, j) \in E, \end{cases}$$

где $d_1=d_2=3$, $d_3=d_4=2$ – степени вершин, E – множество ребер системы.

Численные расчеты для $k=10, 20, 30$ дают:

$$X^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2499 & 11,1223 & 18,6177 \\ 7,7501 & 0 & 14,8823 & 17,3677 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0073 & 27,9927 \\ 28,00000 & 0 & 28,0073 & 27,9926 \\ 28,0073 & 28,0073 & 0 & 0 \\ 27,9927 & 27,9926 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X^{(20)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2500 & 11,1250 & 18,6250 \\ 7,7500 & 0 & 14,8750 & 17,3750 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(20)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 0 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X^{(30)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2500 & 11,1250 & 18,6250 \\ 7,7500 & 0 & 14,8750 & 17,3750 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(30)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 0 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что решение практически стабилизировалось. Матрица полезности $C^{(k)}$ показывает, что обслуживание линий проходит равномерно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.И. Ерзин, С.Н. Астраков, И.И. Тахонов, О.А. Гадяцкая. Одна задача функционирования распределенной сети. - Материалы международного семинара «Вычислительные методы и решение оптимизационных задач». Бишкек, 2004, с. 77-82.

2. С.Н. Астраков, А.И. Ерзин. Одна модель саморегулирующейся системы. - Математические структуры и моделирование, 2004, № 13, с. 30-38.

□ Автор статьи:

Астраков

Сергей Николаевич

- канд. физ.-мат. наук, доц.,
зав. каф. высшей и прикладной ма-
тематики (Кемеровский филиал
РГТЭУ)