ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

А.С.Сорокин

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

1. Понятие полумарковского процесса

Непрерывно растущий интерес к теории надежности и ее приложениям с самого своего появления был вызван конкретными практическими нуждами. Хотя рождение теории надежности как науки относится примерно к 1950 году, но еще задолго до этого во многих областях техники, для повышения работоспособности разного рода устройств, с успехом использовались те приемы и рецепты, которые лишь теперь получили свое научное обоснование.

В теории надежности разработано большое количество моделей, с помощью которых имеется возможность определить характеристики надежности исследуемых технических систем. В то же время ответственность функций, возлагаемых на такие системы, а соответственно и рост их сложности, выдвигает новые принципы построения сложных технологических систем. Системы такого вида проектируются из условий необходимости обеспечения их надежной работы даже при выходе из строя отдельных элементов. Примеров использования резервирования в явном виде можно привести много: применение блокировок на транспорте и при построении энергосистем, увеличение числа двигателей на самолетах, пятое колесо в автомобиле, запасной парашют у парашютиста и т. д.

В настоящее время резервирование, и в частности резервирование с восстановлением, остается одним из оперативных средств обеспечения требуемой надежности систем, поскольку другие пути сопряжены с необходимостью изучения физики отказов.

Функционирование различных систем, рассматриваемых в теории надежности, может быть описано соответствующим образом построенных полумарковских процессов с конечным числом состояний. При этом некоторые задачи теории надежности сводятся к определению времени пребывания полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний. Известно, что основные характеристики надежности технических систем [1-3] могут быть выражены через характеристики пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний.

Надежность технических систем является общим свойством, определяющим их способность к сохранению основных показателей качества во времени. Для количественной оценки надежности применяются характеристики, которые отражают конкретные свойства технических систем, а именно - их безотказность, готовность к использованию и восстанавливаемость. Это вызвано в основном практической необходимостью проведения сравнительной оценки различных технических систем на этапах разработки, изготовления и эксплуатации.

Определим полумарковский процесс следующим образом.

Имеется система с конечным множеством состояний $A\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N\}$, которая в каждый момент времени может находиться в одном из состояний α_i и переходить из состояния α_i в состояние α_j с вероятностью P_{ij}, причем время пребывания системы в состоянии α_i является независимой неотрицательной случайной величиной ζ_{ij} с невырожденной функцией распределения $F(t)=P\{\zeta_{ij} < t\},\ 0\le i,j\le N$, зависящей как от состояния α_i, так и от состояния α_j.

Отметим, что существуют несколько способов задания полумарковского процесса [4,5].

Из определения полумарковского процесса следует, что при переходе из α_i в α_j дальнейшее поведение процесса зависит только от времени пребывания его в состоянии α_j. Это замечание дает возможность составить систему стохастических уравнений, которая является аналогом формулы полной вероятности для случайных величин, причем равенства в уравнениях понимаются в том смысле, что случайные величины, стоящие слева и справа от знака равенства, одинаково распределены. Эти системы стохастических уравнений представляют основную математическую модель при решении многих задач теории надежности. Применение модели полумарковских процессов в большинстве случаев более естественно и значительно проще по сравнению с моделями марковских процессов [1,6]. Так при определении средних характеристик надежности сложных технических систем достаточно рассмотреть систему алгебраических уравнений.

Итак, полумарковский процесс представляет собой весьма общую вероятностную модель, которая может быть использована при решении задач теории надежности.

2. Реализация алгоритма полумарковских процессов для определения характеристик надежности технологических схем

Проиллюстрируем нашу вероятностную модель на конкретных примерах из теории надежности. Заметим, что в известных ранее моделях, описываемых посредством полумарковских процессов [1, 6, 7], предполагалось, что осуществление перехода из одного состояния в другое происходит мгновенно (в бесконечно малое время). На практике для переключения приборов, для перехода в работе с одного прибора на другой требуется некоторое время (малое, но вполне конечное). В предлагаемой модели считается, что включение или выключение прибора требует конечного случайного времени.

Рассмотрим сначала систему, состоящую из двух приборов, один из которых работает, а другой находится в состоянии ненагруженного резерва, причем рабочий прибор отказывает с интенсивностью λ, а резервный прибор находится в выключенном состоянии и до момента включения вместо основного не может отказать (такие системы принято называть дублированными с ненагруженным резервом [2,4]). Пусть имеется одно восстанавливающее устройство и время восстановления обладает показательным распределением с параметром μ. Кроме того, еще имеется включающее устройство и время включения обладает показательным распределением с параметром μ_n, а также выключающее устройство, которое, выполнив возложенные на него функции, отказывает с интенсивностью μ_n.

Требуется определить: среднее время безотказной работы T, определяемое как среднее значение времени работы технической системы до первого отказа; наработку на отказ T_0, определяемую как среднее значение времени непрерывной работы технической системы между последовательными отказами; среднее время восстановления T_b; коэффициент готовности в установившемся режиме в $K_Г$; функцию надежности $P(t)$, определяемую как вероятность безотказной работы, то есть вероятность того, что в заданном интервале времени и при заданных условиях эксплуатации не произойдет отказа.

В этом примере множество состояний системы имеют следующий смысл:

α_0 - начальное состояние системы, при котором один прибор работает, а другой находится в состоянии ненагруженного резерва;

α_1 - состояние системы, при котором один прибор отказал и восстанавливается, а другой включен в работу;

α_2 - состояние, при котором оба прибора находятся в отказавшем состоянии;

$\nabla\rightarrow\Delta$ - состояние переключения с рабочего прибора на резервный;

Δ - состояние выключения отказавшего прибора;

∇ - состояние включения восстановленного прибора.

Граф перехода для рассматриваемой системы может быть представлен рис.1.

Этот граф может быть упрощен там, где встречается последовательность приборов, включающих и выключающих устройств, соединенных последовательно в смысле надежности [6, с. 133]. Заметим, что при последовательном соединении опасности отказа складываются [6, с. 134]. Это позволяет объединить состояние α_0 и состояния переключения $\nabla\rightarrow\Delta$ - в одно состояние α_0', причем интенсивность $\lambda_1=\lambda+\mu_n+\lambda_n$; состояние α_1 и состояние выключения Δ в одно состояние α_1' (интенсивность будет $\lambda_2=\lambda+\lambda_n$), состояние α_2 и состояние включения ∇ в состояние α_2' с интенсивностью восстановления $\mu_1=\mu+\mu_n$.

С учетом сказанного граф переходов принимает вид рис.2.

Таким образом, состояния α_0' и α_1' соответствуют

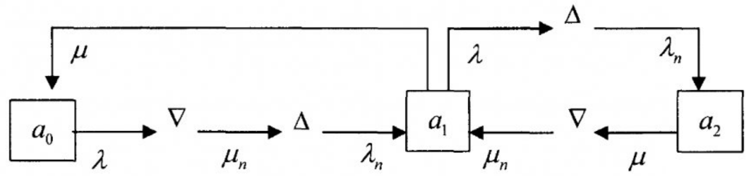

Рис. 1

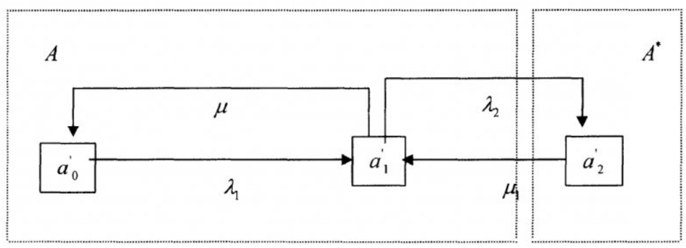

Рис. 2

рабочему состоянию системы, т. е. $A\{\alpha_0', \alpha_1'\}$, а состояние α_2' соответствует ее отказу, т. е. $A\{\alpha_2'\}$.

Времена пребывания системы. Система находится в состоянии α_0' до отказа рабочего прибора, т. е. $\zeta_0 = \xi$. Время пребывания полумарковского процесса в состоянии α_0' имеет функцию распределения вида

$$F_0(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}, t > 0; \quad (1)$$

$$\overline{\varsigma_0} = \overline{\xi} = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Время пребывания системы в α_1' определяется временем безотказной работы включенного прибора и длительностью восстановления отказавшего прибора, т. е. $\zeta_1 = min(\xi, \eta)$ и

$$F_1(t) = 1 - e^{-(\lambda_1+\mu)t}, t > 0; \quad (2)$$

$$\overline{\varsigma_1} = \frac{1}{(\lambda_2 + \mu)}.$$

Время пребывания системы в состоянии α_2' равно длительности восстановления прибора, т. е. $\zeta_2 = \eta$, и

$$F_2(t) = 1 - e^{-\mu_1 t}, t > 0 \quad ; \quad (3)$$

$$\overline{\varsigma_2} = \frac{1}{\mu_1}.$$

Вероятности переходов. Легко убедиться, что вероятности переходов равны

$$P_{01} = 1; \quad P_{10} = \frac{\mu}{(\lambda_2 + \mu)};$$

$$P_{21} = 1; \quad P_{12} = \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + \mu)}. \quad (4)$$

Используя преобразование Лапласа - Стилтьеса и формулы (1) - (4), находим

$$\widetilde{F}_0(s) = \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1};$$

$$\widetilde{F}_1(s) = \frac{\lambda_2+\mu}{s+\lambda_2+\mu};$$

$$\widetilde{F}_2(s) = \frac{\mu_1}{s+\mu_1};$$

$$\varphi_{01}(s) = \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1};$$

$$\varphi_{10}(s) = \frac{\mu}{s+\lambda_2+\mu};$$

$$\varphi_{12}(s) = \frac{\lambda_2}{s+\lambda_2+\mu};$$

$$\varphi_{21}(s) = \frac{\mu_1}{s+\mu_1} \quad (5)$$

Для определения времени непрерывной работы приборов системы выберем $A\{\alpha_0, \alpha_1\}$. Тогда, используя систему уравнений для средних времен пребывания системы приборов в подмножестве состояний A (см. [4], с.16), получим среднее время безотказной работы системы

$$T = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu}{\lambda_1\lambda_2} \quad ; \quad (6)$$

наработки на отказ

$$T_0 = \frac{\lambda_1+\mu}{\lambda_1\lambda_2} \quad (7)$$

и среднее время восстановления

$$T_B = \frac{1}{\mu_1}. \quad (8)$$

Согласно определению коэффициента готовности из формул (7), (8) , имеем

$$K_\Gamma = \frac{T_0}{T_0+T_B} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1(\lambda_1+\lambda_2+\mu)}} =$$

$$= (\mu+\mu_n)(\lambda+\lambda_n+\mu+\mu_n)\times$$

$$[(\lambda+\lambda_n)^2+(\mu+\mu_n)^2+$$

$$+(\mu+2\mu_n)(\lambda+\lambda_n)]^{-1}$$

(9)

Используя формулу полной вероятности и переходы к преобразованиям Лапласа, получим

$$\phi_i(s) = \widetilde{F}_i(s) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{1} \varphi_{ij}(s)[\phi_j(s) - 1], i = 0,1.$$

(10)

Из формул (5) и (10) легко получить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\phi_0(s) = \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1}[\phi_1(s) - 1];$$

$$\phi_1(s) = \frac{\lambda_2+\mu}{s+\lambda_2+\mu} + \frac{\mu}{s+\lambda_2+\mu}[\phi_0(s) - 1];$$

(11)

откуда находим

$$\phi_0(s) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{s^2+(\lambda_1+\lambda_2+\mu)s+\lambda_1\lambda_2}.$$

(12)

С помощью (12) получаем преобразование Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-st} P(t)dt =$$

$$= \frac{s+\lambda_1+\lambda_2+\mu}{s^2+(\lambda_1+\lambda_2+\mu)s+\lambda_1\lambda_2}.$$

(13)

Используя формулу обращения, находим вероятность безотказной работы технической системы

$$P(t) = \frac{s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}}{s_1 - s_2} \quad (14)$$

где

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}[-(2\lambda+2\lambda_n+\mu+\mu_n) \quad (15)$$

$$\pm\sqrt{4(\lambda+\lambda_n)\mu+(\mu+\mu_n)^2}\,].$$

Итак, поставленная задача для системы с двумя приборами решена полностью.

Следствие. Если пренебречь величинами μ_n и λ_n , то получаем как частный случай известную задачу [4, с. 23] .

Теперь рассмотрим задачу в более общем виде. Пусть система состоит из n рабочих и m резервных приборов, а также из r восстанавливающих устройств. Каждый прибор соединен в смысле надежности последовательно со своими включающим и выключающим устройствами. Каждый отказавший прибор после срабатывания своего выключающего устройства поступает на восстанавливающее устройство. В том случае, если все восстанавливающие устройства заняты, отказавший прибор становится в очередь. Каждый отказавший прибор замещается прибором из нёнагруженного резерва. Система находится в рабочем состоянии, если число исправных приборов не меньше n. Во время отказа системы оставшиеся (n - 1) приборов не работают до момента восстановления системы. Все приборы однотипны, и время их непрерывной работы

ξ; распределено по показательному закону с параметром λ, а время восстановления η - также показательно распределенная случайная величина с параметром μ. Кроме того, время включения η_n распределено по показательному закону с параметром μ_n, а время выключения ξ_n - показательно распределенная случайная величина с параметром λ_n.

Требуется определить среднее время безотказной работы T, наработку на отказ T_0, среднее время восстановления T_b, коэффициент готовности в установившемся режиме $K_Г$, функцию надежности $P(t)$.

Используя соображения, высказанные при решении предыдущей задачи, представим граф переходов для рассматриваемой системы в преобразованном виде (рис.3). где приняты обозначения

$$\lambda_1=\lambda+\mu_n+\lambda_n,\ \lambda_2=\lambda+\lambda_n,\quad \mu_1=\mu+\mu_n, \qquad (16)$$

причем $\alpha_i, 0 \le i \le m+1$, есть состояние системы, когда в ней i неисправных приборов.

Итак, рассматриваемая техническая система может находиться в одном из состояний множества A_{m+1}, и она работоспособна, если находится в подмножестве состояний A_m, т. е. когда неисправных приборов не больше m, и отказывает, если находится в состоянии A_{m+i}.

Времена пребывания системы. В состоянии α_0 система находится до первого отказа одного из рабочих приборов, т. е. $\varsigma_0 = \min\limits_{1\le i\le n} \xi_i$.

Время пребывания полумарковского процесса в состоянии α_0 имеет функцию распределения вида

$$F_0(t)=1-e^{-n\lambda_1 t}, t>0 \qquad (17)$$

и

$$\bar{\varsigma}_0=\frac{1}{n\lambda_1}. \qquad (18)$$

Если $1\le i \le r \le m-1$, то

$$F_i(t)=1-e^{-(n\lambda_1+i\mu)t} \qquad (19)$$

и

$$\bar{\varsigma}_i=\frac{1}{n\lambda_1+i\mu}. \qquad (20)$$

Если $r< i \le m-1$, то

$$F_i(t)=1-e^{-(n\lambda_1+r\mu)t} \qquad (21)$$

и

$$\bar{\varsigma}_i=\frac{1}{(n\lambda_1+r\mu)}. \qquad (22)$$

Если $r < m$, то

$$F_m(t)=1-e^{-(n\lambda_1+r\mu)t} \qquad (23)$$

и

$$\bar{\varsigma}_m=\frac{1}{(n\lambda_2+r\mu)}. \qquad (24)$$

Если $m \le r$, то

$$F_m(t)=1-e^{-(n\lambda_2+m\mu)t} \qquad (25)$$

и

$$\bar{\varsigma}_m=\frac{1}{(n\lambda_2+m\mu)}. \qquad (26)$$

Очевидно, что

$$F_{m+1}(t)=1-e^{-r\mu_1 t}, t>0 \qquad (27)$$

и

$$\bar{\varsigma}_{m+1}=\frac{1}{r\mu_1}. \qquad (28)$$

Вероятности переходов. Вычисляя вероятности переходов, получим

$$P_{01}=1, \qquad (29)$$

для $1\le i \le r \le m-1$

$$P_{i,i-1}=\frac{i\mu}{n\lambda_1+i\mu},$$

$$P_{i,i+1}=\frac{r\lambda_1}{n\lambda_1+i\mu}, \qquad (30)$$

для $r< i \le m-1$

$$P_{i,i-1}=\frac{r\mu}{n\lambda_1+r\mu},$$

$$P_{i,i+1}=\frac{n\lambda_1}{n\lambda_1+r\mu}, \qquad (31)$$

для $r < m$

$$P_{m,m-1}=\frac{r\mu}{n\lambda_2+r\mu},$$

$$P_{m,m+1}=\frac{n\lambda_2}{n\lambda_2+r\mu}, \qquad (32)$$

для $m \le r$

$$P_{m,m-1}=\frac{m\mu}{n\lambda_2+m\mu},$$

$$P_{m,m+1}=\frac{n\lambda_2}{n\lambda_2+m\mu}, \qquad (33)$$

а также

$$P_{m+1,m}=1. \qquad (34)$$

Чтобы не усложнять изложение решения задачи, разобьем последующие рассуждения на ряд случаев, выделяемых в зависимости от наличия восстанавливающих устройств.

Случай, когда система имеет одно восстанавливающее устройство, т. е. r=1. С помощью преобразования Лапласа - Стилтьеса и формул (17) - (27) получаем

$$\widetilde{F}_0(s)=\frac{n\lambda_1}{s+n\lambda_1}; \qquad (35)$$

$$\widetilde{F}_i(s)=\frac{n\lambda_1+\mu}{s+n\lambda_1+\mu}, i=\overline{1,m-1};$$

$$\widetilde{F}_m(s)=\frac{n\lambda_2+\mu}{s+n\lambda_2+\mu};$$

$$\widetilde{F}_{m+1}(s)=\frac{\mu_1}{s+\mu_1}.$$

Из формул (29) - (34) следует, что

$$\varphi_{01}(s)=\frac{n\lambda_1}{s+n\lambda_1}; \qquad (36)$$

для $1\le i \le m-1$

$$\varphi_{i,i-1}(s)=\frac{\mu}{s+n\lambda_1+\mu};$$

$$\varphi_{i,i+1}(s)=\frac{n\lambda_1}{s+n\lambda_1+\mu}; \qquad (37)$$

для $i=m$

$$\varphi_{m,m-1}(s)=\frac{\mu}{s+n\lambda_2+\mu};$$

$$\varphi_{m,m+1}(s)=\frac{n\lambda_2}{s+n\lambda_2+\mu}; \qquad (38)$$

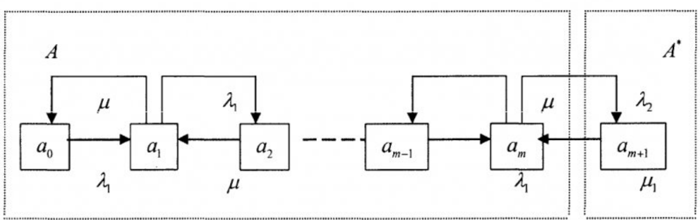

Рис. 3

$$\varphi_{m+1,m}(s) = \frac{\mu_1}{s+\mu_1} \qquad (39)$$

Используя рекуррентные формулы для средних времен (см. [4], с. 33), получаем, что среднее время безотказной работы системы

$$T = \frac{1}{n(\lambda+\lambda_n)} \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho} + \\ + \frac{\lambda+\lambda_n}{\lambda+\lambda_n+\mu_n} \frac{m-(m+1)\rho+\rho^{m+1}}{(1-\rho)^2}, \qquad (40)$$

где

$$\rho = \frac{\mu}{n(\lambda+\lambda_n+\mu_n)}, \qquad (41)$$

наработка на отказ

$$T_0 = \frac{1}{n(\lambda+\lambda_n)} \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho}, \qquad (42)$$

среднее время восстановления

$$T_B = \frac{1}{\mu+\mu_n}. \qquad (43)$$

Из формул (41) - (43) следует

$$K_\Gamma = \frac{1}{1+\frac{n(\lambda+\lambda_n)(1-\rho)}{(\mu+\mu_n)(1-\rho^{m+1})}} \qquad (44)$$

Используя формулу полной вероятности и преобразование Лапласа, с помощью формул (35) - (39) получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\phi_0(s) = \frac{n\lambda_1}{s+n\lambda_1} + \frac{n\lambda_1}{s+n\lambda_1}[\phi_1(s)-1];$$

$$\phi_i(s) = \frac{n\lambda_1+\mu}{s+n\lambda_1+\mu} + \frac{\mu}{s+n\lambda_1+\mu} \times$$

$$[\phi_{i-1}(s)-1] + \frac{n\lambda_1}{s+n\lambda_1+\mu}[\phi_{i+1}(s)-1];$$

$$i = 1,2,\ldots,m-1,$$

$$\phi_m(s) = \frac{n\lambda_2+\mu}{s+n\lambda_2+\mu} + \\ + \frac{\mu}{s+n\lambda_2+\mu}[\phi_{m-1}(s)-1]. \qquad (45)$$

Для получения $\phi_0(s)$, удовлетворяющего системе (45), в явном виде введем некоторые обозначения:

$$\alpha_s = \frac{\mu}{s+n\lambda_1+\mu}; \qquad (46)$$

$$\beta_s = \frac{n\lambda_1}{s+n\lambda_1+\mu}; \qquad (47)$$

$$\gamma_s = \frac{n\lambda_1}{s+n\lambda_1}; \qquad (48)$$

$$\delta_s = \frac{\mu}{s+n\lambda_2+\mu}; \qquad (49)$$

$$\chi_s = \frac{n\lambda_2}{s+n\lambda_2+\mu}. \qquad (50)$$

Кроме того, запишем цепную дробь

$$1 - \cfrac{\alpha_s\beta_s}{1-\cfrac{\alpha_s\beta_s}{1-\ldots\cfrac{\alpha_s\beta_s}{1-\beta_s\delta_s}}} = \qquad (51)$$

$$= [\alpha_s\beta_s, i; \beta_s\delta_s],$$

считая

$$[\alpha_s\beta_s, 0; \beta_s\delta_s] = 1-\beta_s\delta_s. \qquad (52)$$

Исключая из предпоследнего уравнения системы (45) функции $\phi_m(s)$ с помощью последнего уравнения этой системы, находим явное представление функции $\phi_{m-1}(s)$ через $\phi_{m-2}(s)$. Считая это представление последним уравнением остаточной части системы, производим над остаточной частью те же действия. Продолжая эту последовательность действий, получим в остаточной части системы одно уравнение, содержащее одну неизвестную функцию $\phi_0(s)$. С учетом обозначений (46) - (52)

$$\phi_0(s) = \chi_s\gamma_s(\beta_s)^{m-1} \times \\ \times \left\{ \left(1 - \frac{\alpha_s\gamma_s}{[\alpha_s\beta_s, m-2; \beta_s\delta_s]}\right) \prod_{i=0}^{m-2} [\alpha_s\beta_s, i; \beta_s\delta_s] \right\}^{-1} \qquad (53)$$

Для формулы (53) получаем преобразование Лапласа

$$s\int_0^\infty e^{-st}P(t)dt = 1 - \chi_s\gamma_s(\beta_s)^{m-1} \\ \times \left\{ \left(1 - \frac{\alpha_s\gamma_s}{[\alpha_s\beta_s, m-2; \beta_s\delta_s]}\right) \prod_{i=0}^{m-2} [\alpha_s\beta_s, i; \beta_s\delta_s] \right\}^{-1} \qquad (54)$$

Полученное интегральное уравнение (54) решается с помощью формулы обращения.

Используя свойства цепных дробей и формулы (46) - (50), находим, что правая часть уравнения (54) есть отношение многочленов степени $m-1$ относительно s.

Тогда (54) принимает вид:

$$\int_0^\infty e^{-st}P(t)dt = \frac{Q_m(s)}{P_{m+1}(s)}, \qquad (55)$$

где $Q_m(s)$, $P_{m+1}(s)$ - полиномы степени m и $m+1$ относительно s.

Кроме того,

$$P_{m+2}(s)Q_m(s) - P_{m+1}(s)Q_{m-1}(s) = \pm 1 \qquad (56)$$

(при m - четном, соответственно, m - нечетном), и

$$P_{m+1}(s) = (s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_{m+1}) \qquad (57)$$

где $s_i \neq s_k$, $i \neq k$.

Из уравнения (55) находим вероятность безотказной работы технической системы

$$P(t) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{Q_m(s_k)}{P'_{m+1}(s_k)} e^{s_k t}, \qquad (58)$$

причем

$$P'_{m+1}(s_k) = \lim\left[\frac{P_{m-1}s)}{s-s_k}\right] \qquad (59)$$

Таким образом, формулы (40), (42), (43), (44) и (58) дают ответ поставленной задачи в случае, когда система имеет одно восстанавливающее устройство.

Аналогично исследуется случай ограниченного восстановления - $1 < r < m$.

С помощью формул (17) - (34) могут быть получены аналитические выражения для среднего времени безотказной работы, наработки на отказ, среднего времени восстановления, коэффициента готовности, функции надежности и т. д.

Отметим, что формулы при $1 < r < m$, аналогичные формулам (40), (42), (43), (44) и (58), полученным при $r = 1$, будут более громоздкими.

Выделим случай, когда число восстанавливающих устройств равно числу резервных, т. е. $r = m$.

В этом случае, согласно изложенной методике, получаем, что наработка на отказ

$$T_o = \frac{1}{n(\lambda+\lambda_n)} \sum_{i=0}^{n} \frac{m!}{(m-i)!}\rho^i, \qquad (60)$$

где

$$\rho = \frac{\mu}{n(\lambda + \lambda_n + \mu_n)},$$

среднее время восстановления

$$T_B = \frac{1}{m(\mu + \mu_n)}, \qquad (61)$$

коэффициент готовности следует из формул (60) и (61)

$$K_\Gamma = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{m(\mu+\mu_n)}{n(\lambda+\lambda_n)} \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!}\rho^i}},$$

Рассмотрим случай неограниченного восстановления, т. е. $r = m+1$.

Полагая в формулах (17) - (34) $r = m+1$ и рассматривая рекуррентные формулы для средних времен, находим, что среднее время безотказной работы системы

$$T = \frac{1}{n(\lambda+\lambda_n)} \times \left\{ \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{(m-j)!}\rho^j + \frac{\lambda+\lambda_n}{\lambda+\lambda_n+\mu_n} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{(j-i)!}\rho^i \right\},$$

наработка на отказ

$$T = \frac{1}{n(\lambda+\lambda_n)} \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{(m-j)!}\rho^j,$$

среднее время восстановления

$$T_B = \frac{1}{(m+1)(\mu+\mu_n)},$$

коэффициент готовности

$$K_\Gamma = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{(m+1)(\mu+\mu_n)}{n(\lambda+\lambda_n)} \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!}\rho^i}}.$$

Используя формулу полной вероятности и преобразования Лапласа, можно получить интегральное уравнение, аналогичное формуле (55), относительно функции надежности *P(t)*, которое может быть решено с помощью формулы обращения.

В заключение, приведем несколько известных примеров, которые следуют как частные случаи из полученных результатов.

3. Анализ технологических схем углесосных станций

Анализ схем углесосных станций на действующих и проектируемых гидрошахтах указывает на их блочную структуру [7,8]: в схеме предусматривается обычно столько абсолютно одинаковых и несвязных между собой блоков, сколько требуется при одновременной работе углесосов.

Каждому работающему углесосу обычно придается два резервных. Связь основного и резервных углесосов с пульповодом осуществляется через систему задвижек и обратных клапанов. Типовым (наиболее часто применяемым) блоком углесосной станции, считается, когда $n = 1, m = 2$.

Требуется определить коэффициент готовности и вероятность безотказной работ.

Используя изложенную выше методику, основанную на полумарковских процессах, можно получить в замкнутой аналитической форме не только коэффициент готовности, но и другие характеристики блока.

Так, полагая в формуле (44) $n = 1$, $m = 2$, получим коэффициент готовности в виде:

$$K_\Gamma = \frac{1}{1 + \frac{(\lambda+\lambda_n)(1-\rho)}{(\mu+\mu_n)(1-\rho^3)}}, \qquad (44')$$

где

$$\rho = \frac{\mu}{\lambda + \lambda_n + \mu_n},$$

Кроме того, полагая $n = 1$, $m = 2$ в формуле (58), получим

$$P(t) = \frac{Q_2(s_1)}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)}e^{s_1 t} + \frac{Q_2(s_2)}{(s_2-s_1)(s_2-s_3)}e^{s_2 t} + \frac{Q_2(s_3)}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)}e^{s_3 t},$$

причем

$$Q_2(s) = s^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu) + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu + \mu^2;$$

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) = s^3 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu)s^2 + (\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu + \mu^2)s + \lambda_1^2\lambda_2.$$

Итак, предлагаемая методика вычисления основных характеристик надежности технологических схем позволяет получать простые аналитические зависимости.

Построенная вероятностная модель является более полной, чем ранее известные [4], так как в ней учтено, что переход из одного состояния технической системы в другое осуществляется в некоторое случайное конечное время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. Пер. с нем. -М.: Радио и связь, 1988. 392 с.

2. *Levy P.* Systemes semi-markoviens `a an plus une infinite denombrable d'etats possibles. //Proceedings of the international congress of mathematicians. 1954. V. 2. P.133.

3. *Howard R.A.* System analysis of semi-markov processes.//Transactions on military electronics. 1964. V.8, P.114-124.

4. *Броди С.М., Власенко О.Н., Марченко Б.Г.* Расчет и планирование испытаний систем на надежность. -Киев: Наукова Думка, 1970. 192с.

5. *Сорокин А.С.* Применение системы MATLAB для построения структурных формул некоторых

классов аналитических функций в конечносвязных областях.// Всероссийская научная конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». -М.: 2002. С.87.

6. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. -М.: Наука. 1965. 363с.

7. *Разгильдеев Г.И., Сорокин А.С.* Оптимизация резервирования шахтных технологических систем с использованием принципа максимума.// Труды ВНИИГидроугля. -Новокузнецк, 1975. Вып. 36. С.127 – 138.

8. *Сорокин А.С.* Выбор технологических схем углесосных станций. //Труды ВНИИГидроугля. Новокузнецк, 1975. Вып. 35. С.70 – 74.

Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат.наук, ст.н.с., доцент
(филиал КузГТУ, г. Новокузнецк)

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

ДИНАМО АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Граф порядка n назовем арифметическим, если его вершинами являются натуральные числа от 1 до n. Две вершины будем считать смежными лишь в том случае, когда их сумма есть простое число. Все такие графы являются связными.

Окрестностью данной вершины назовем множество всех вершин графа, смежных с данной. При этом условимся считать данную вершину принадлежащей своей окрестности.

В связном графе рассмотрим динамическую систему с дискретным временем, в которой каждая вершина находится в одном из двух возможных состояний. Обозначим эти состояния через 1 и 0.

Переход системы из одного состояния к следующему будем осуществлять по правилу: в каждый момент времени вершина графа принимает то состояние, которое имели большинство вершин ее окрестности в предыдущий момент времени. Если же число вершин окрестности с разными состояниями одинаково, то будем считать, что данная вершина принимает (или сохраняет) состояние 1.

Наименьшее множество вершин, которые в начальный момент находились в состоянии 1 и через несколько шагов времени привели к этому состоянию все вершины графа, образуют в данном графе так называемую *динамическую монополию* или, коротко, *динамо*. Число вершин динамо обозначим через m .

Поиск динамо в графах имеет многие приложения. К ним можно отнести изучение закономерностей распространения эпидемии, процессов кристаллизации и др. В предлагаемой заметке мы обратимся к поиску динамо в арифметических графах, изучая поведение величины m/n .

При $n=4$ начальные условия 1100 и 1010 с одношаговой динамикой приводят соответственно к состоянию 1100 и 0000. Динамо образует любая тройка вершин.

При $n=6$ любая тройка вершин приводит к циклу. Динамо образует четыре вершины 110101.

При $n=8$ четыре вершины приводят к циклу вида 10101010, 01010101, 10101010. Пять вершин образуют динамо с двухшаговой динамикой: 10111010, 11110111, 11111111.

Продолжая поиск динамо до $n=12$, получим: n =4, 6, 8, 10, 12; m=3, 4, 4, 6, 7, т.е. $m = 1+n/2$.

Арифметический граф, связанный с распределением простых чисел, является в некотором смысле случайным. Для случайных графов существует гипотеза о том, что мощность динамо пропорциональна квадратному корню из порядка графа. Поэтому полученную линейную зависимость между величинами m и n можно рассматривать как некоторое приближение для графов небольшого порядка. Для больших значений n поиск динамо необходимо осуществлять с помощью соответствующей компьютерной программы.

Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт.техн.наук, проф., зав.каф.
высшей математики