

## ГЕОМЕХАНИКА

**УДК 539.3**

**И.И. Петрушева**

### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО МНОГОСЛОЙНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПОЯСА

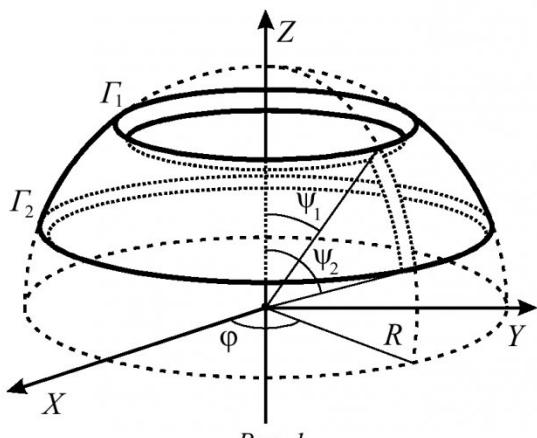
В работах [10, 11] выполнено исследование установившихся свободных колебаний многослойных армированных цилиндрических оболочек. В данной работе продолжена разработка этой темы. Ниже приведены некоторые новые результаты численного исследования спектра собственных частот и собственных форм свободных колебаний многослойного армированного сферического пояса, полученные как с учетом, так и без учета поперечных сдвиговых деформаций.

Рассмотрим многослойную сферическую оболочку радиуса  $R$ , толщины  $h$ , собранная из  $m$  упругих армированных ортотропных слоев постоянной толщины. На её внутренней поверхности введем систему гауссовых координат  $s, \varphi$ , где  $s$  – длина дуги меридиана,  $\varphi$  – угловая координата ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). Координатные линии этой системы совпадают с линиями кривизны сферической поверхности. Параметры Ламе ( $A_1, A_2$ ) и радиусы кривизны ( $R_1, R_2$ ) [1, гл. 1, 3] этих линий таковы:

$$A_1 = I, A_2 = R \cdot \sin(\psi), R_1 = R_2 = R,$$

где  $\psi = \psi_2 - s/R$ .

Вводя поперечную координату  $z$ , отсчитывающую вдоль нормали к поверхности приведения, получим пространственную систему  $s, \varphi, z$ . В этой координатной системе уравнения поверхностей



Rис. 1

раздела  $k$ -го и  $(k+1)$ -го слоев, где  $k = 1, \dots, m-1$ , записывается в виде:

$$z = h_k, 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m = < h.$$

Ниже рассматривается задача о свободных установившихся колебаниях многослойного армирован-

ванного сферического пояса, вырезанного из сферической оболочки нормальными сечениями  $s = 0, s = s_1$  (торцы  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_1$ ; рис. 1).

При исследовании поставленной задачи используем линеаризованные уравнения динамики сферической оболочки, полученные с привлечением неклассической модели деформирования, учитывающей поперечные сдвиговые деформации [1].

Принимаем, что направления осей ортотропии (армирования) совпадают с направлением координатных осей, а интенсивность армирования не зависит от координаты  $\varphi$ , однако может изменяться вдоль меридиональной координаты  $s$ . Оболочку считаем достаточно тонкой и пренебрегаем во всех уравнениях величинами порядка  $h/R$  по сравнению с 1. Замкнутая система уравнений динамики сферической оболочки включает в себя следующие группы зависимостей [1, гл. 3, § 5] (здесь и ниже  $k = 1, \dots, m$  – номер слоя):

- соотношения упругости:

$$\sigma_{ss}^{(k)} = a_{11}^{(k)} \varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \quad (1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = a_{12}^{(k)} \varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)},$$

$$\sigma_{s\varphi}^{(k)} = \sigma_{\varphi s}^{(k)} = a_{33}^{(k)} \varepsilon_{s\varphi}^{(k)},$$

$$\tau_{sz}^{(k)} = G_{13}^{(k)} \gamma_{sz}^{(k)}, \quad \tau_{\varphi z}^{(k)} = G_{23}^{(k)} \gamma_{\varphi z}^{(k)}.$$

- закон распределения физических составляющих вектора перемещения по толщине пакета слоёв:

$$v_s^{(k)} = u_s - z \frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)} \pi_s, \quad (2)$$

$$v_\varphi^{(k)} = u_\varphi - \frac{z}{R \sin \psi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi, \quad v_z^{(k)} = w.$$

- соотношения деформации-перемещения:

$$\gamma_{sz}^{(k)} = \frac{f'(z) \cdot \pi_s}{G_{13}^{(k)}}, \quad \gamma_{\varphi z}^{(k)} = \frac{f'(z) \cdot \pi_\varphi}{G_{23}^{(k)}}, \quad \varepsilon_{zz}^{(k)} = 0, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ss}^{(k)} = \frac{\partial u_s}{\partial s} - z \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial \mu_{11}^{(k)}}{\partial s} \pi_s + \mu_{11}^{(k)} \frac{\partial \pi_s}{\partial s} + \frac{w}{R},$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{1}{R \sin \psi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{z}{R \sin \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + z \cos \psi \frac{\partial w}{\partial s} + \right)$$

$$+ \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} - \cos \psi \left( u_s + \mu_{11}^{(k)} \pi_s \right) + \sin \psi \cdot w \Big),$$

$$2\varepsilon_{s\varphi}^{(k)} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} - \frac{2z}{R \sin \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} -$$

$$- \frac{2z \cos \psi}{R^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{22}^{(k)}}{\partial s} \pi_\varphi + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial s} +$$

$$+ \frac{1}{R \sin \psi} \left( \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} + \mu_{11}^{(k)} \frac{\partial \pi_s}{\partial \varphi} - \cos \psi \left( u_\varphi - \mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi \right) \right).$$

- выражение физических составляющих обобщённых усилий и моментов оболочки через составляющие напряжений в её слоях:

$$[T_{ss}, M_{ss}, S_{ss}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{ss}^{(k)} [I, z, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (4)$$

$$[T_{s\varphi}, M_{s\varphi}, S_{s\varphi}, S_{\varphi s}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{s\varphi}^{(k)} [I, z, \mu_{22}^{(k)}, \mu_{11}^{(k)}] dz,$$

$$[T_{\varphi\varphi}, M_{\varphi\varphi}, S_{\varphi\varphi}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} [I, z, \mu_{22}^{(k)}] dz,$$

$$Q_s = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left( \sigma_{ss}^{(k)} \frac{\partial \mu_{11}^{(k)}}{\partial s} - \frac{\operatorname{ctg} \psi}{R} \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \times \right. \\ \left. \times (\mu_{11}^{(k)} - \mu_{22}^{(k)}) + \frac{\tau_{sz}^{(k)} f'(z)}{G_{13}^{(k)}} \right) dz$$

$$Q_\varphi = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left( \sigma_{s\varphi}^{(k)} \left( \frac{\operatorname{ctg} \psi}{R} (\mu_{22}^{(k)} - \mu_{11}^{(k)}) + \frac{\partial \mu_{22}^{(k)}}{\partial s} \right) \right. \\ \left. + \frac{\tau_{\varphi z}^{(k)} f'(z)}{G_{23}^{(k)}} \right) dz.$$

- уравнения динамики оболочки:

$$\frac{\partial (R \sin \psi \cdot T_{ss})}{\partial s} + \cos \psi \cdot T_{\varphi\varphi} + \frac{\partial T_{s\varphi}}{\partial \varphi} -$$

$$- R \sin \psi \cdot \ddot{X}_s + R \sin \psi \cdot q_1 = 0,$$

$$\frac{\partial (R \sin \psi \cdot T_{s\varphi})}{\partial s} - \cos \psi \cdot T_{s\varphi} + \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} -$$

$$- R \sin \psi \cdot \ddot{X}_\varphi + R \sin \psi \cdot q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial (R \sin \psi \cdot M_{ss})}{\partial s} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \right] + \frac{I}{R \sin \psi} \frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ \cos \psi \cdot M_{\varphi\varphi} - R \sin \psi \cdot \ddot{Y}_s$$

$$- \frac{2 \operatorname{ctg} \psi}{R} \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} - \sin \psi (T_{ss} + T_{\varphi\varphi}) =$$

$$= R \sin \psi \cdot \ddot{I} + \frac{\partial \ddot{Y}_\varphi}{\partial \varphi} + R \sin \psi \cdot q_n,$$

$$\frac{\partial (R \sin \psi \cdot S_{ss})}{\partial s} + \cos \psi \cdot S_{\varphi\varphi} + \frac{\partial S_{\varphi s}}{\partial \varphi} -$$

$$- R \sin \psi \cdot Q_s - R \sin \psi \cdot \ddot{Z}_s + R \sin \psi \cdot q_3 = 0,$$

$$\frac{\partial (R \sin \psi \cdot S_{s\varphi})}{\partial s} - \cos \psi \cdot S_{\varphi s} + \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} -$$

$$- R \sin \psi \cdot Q_\varphi - R \sin \psi \cdot \ddot{Z}_\varphi + R \sin \psi \cdot q_4 = 0.$$

В уравнениях (1) – (5) приняты следующие обозначения:

$$\mu_{\alpha\alpha}^{(k)} = \frac{f(z) - f(h_{k-1})}{G_{\alpha 3}^{(k)}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \int_{h_{j-1}}^{h_j} \left( \frac{f(h_j) - f(h_{j-1})}{G_{\alpha 3}^{(j)}} \right) dz, \quad \alpha = 1, 2$$

$$[X_s, Y_s, Z_s] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k v_s^{(k)} [I, z, \mu_{11}^{(k)}] dz,$$

$$[X_\varphi, Y_\varphi, Z_\varphi, I] =$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k [v_\varphi^{(k)}, z \cdot v_\varphi^{(k)}, \mu_{22}^{(k)}, v_\varphi^{(k)}, w] dz.$$

Здесь и выше,  $q_1, q_2, q_n, q_3, q_4$  – составляющие внешних поверхностных нагрузок, явное выражение которых представлено в [1, гл. 3, § 5]. Функциональный параметр  $f(z)$ , характеризующий распределение поперечных сдвиговых напряжений по толщине оболочки, принят, следуя [1], в виде  $f(z) = z^3 - 1.5 h z^2$ .

Итак, (1) – (5) – замкнутая система соотношений, описывающая в линейном приближении колебания сферической оболочки. Записанная в перемещениях, она является системой пяти дифференциальных уравнений относительно пяти функций  $u_s, u_\varphi, w, \pi_s, \pi_\varphi$  и интегрируется при соответствующих краевых условиях, полная система которых приведена в [1, гл. 3, § 4]. Ниже рассматривается задача о свободных колебаниях сферического пояса, со следующими способами закрепления краёв:

1. жестко защемленные торцы:

при  $s = 0, s = s_1$

$$w = \frac{\partial w}{\partial s} = u_s = u_\varphi = \pi_s = \pi_\varphi = 0. \quad (6)$$

2. торец  $\Gamma_1$  защемлен жестко,  $\Gamma_2$  – свободен от усилий (см рис. 1):

при  $s = s_1$

$$w = \frac{\partial w}{\partial s} = u_s = u_\varphi = \pi_s = \pi_\varphi = 0, \quad (7.1)$$

при  $s = 0$

$$T_{ss} = T_{s\varphi} = M_{ss} = S_{ss} = S_{s\varphi} = 0, \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(R \sin \psi \cdot M_{ss})}{\partial s} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \\ & + \cos \psi \cdot M_{\varphi\varphi} - R \sin \psi \cdot \ddot{Y}_s = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу замкнутости контура оболочки по угловой координате, должно выполняться условие  $2\pi$ -периодичности относительно  $\varphi$ .

Дифференциальные уравнения и соответствующие им краевые условия задачи о собственных колебаниях оболочки получим из системы (1) – (7), следуя методике вывода, подробно изложенной в [1, 4, 6]. С этой целью, в уравнениях (5), примем равными нулю составляющие внешних поверхностных и контурных нагрузок, а также выполним преобразование:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$$

( $\omega$  – частота собственных колебаний). В результате, соотношения (1) – (4) сохраняют свою форму, а уравнения (5) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(R \sin \psi \cdot T_{ss})}{\partial s} + \cos \psi \cdot T_{\varphi\varphi} + \\ & + \frac{\partial T_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot X_s = 0, \\ & \frac{\partial(R \sin \psi \cdot T_{s\varphi})}{\partial s} - \cos \psi \cdot T_{s\varphi} + \\ & + \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot X_\varphi = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial(R \sin \psi \cdot M_{ss})}{\partial s} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \right. \\ & \left. + \cos \psi \cdot M_{\varphi\varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot Y_s \right] + \\ & + \frac{I}{R \sin \psi} \frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \psi}{R} \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} - \\ & - \sin \psi (T_{ss} + T_{\varphi\varphi}) + \omega^2 \left( R \sin \psi \cdot I + \frac{\partial \ddot{Y}_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0 \\ & \frac{\partial(R \sin \psi \cdot S_{ss})}{\partial s} + \cos \psi \cdot S_{\varphi\varphi} + \frac{\partial S_{\varphi s}}{\partial \varphi} - \\ & - R \sin \psi \cdot Q_s + \omega^2 R \sin \psi \cdot Z_s = 0, \\ & \frac{\partial(R \sin \psi \cdot S_{s\varphi})}{\partial s} - \cos \psi \cdot S_{\varphi s} + \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \\ & - R \sin \psi \cdot Q_\varphi + \omega^2 R \sin \psi \cdot Z_\varphi = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Краевые условия (6) остаются без изменений, а (7) записываются в следующей форме:

при  $s = s_1$

$$w = \frac{\partial w}{\partial s} = u_s = u_\varphi = \pi_s = \pi_\varphi = 0, \tag{9.1}$$

при  $s = 0$

$$\begin{aligned} T_{ss} = T_{s\varphi} = M_{ss} = S_{ss} = S_{s\varphi} = 0, \tag{9.2} \\ \frac{\partial(R \sin \psi \cdot M_{ss})}{\partial s} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \\ + \cos \psi \cdot M_{\varphi\varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot Y_s = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, задача об установившихся свободных колебаниях сферического пояса сформулирована как задача определения спектра собственных частот и соответствующих им собственных элементов линейной краевой задачи (1) – (4), (6), (8), (9).

Представим полученную систему в векторно-матричной форме, вводя безразмерную независимую переменную  $x$  и вектор-столбец  $y = [y_1, \dots, y_{12}]^\top$  безразмерных кинематических и силовых характеристик напряженно-деформированного состояния оболочки:

$$s = R \delta \cdot x, \delta = \psi_2 - \psi_1, 0 \leq x \leq 1; \psi = \psi_2 - \delta \cdot x;$$

$$\bar{\rho}_k = R^2 \rho_k / E_I^c, \tag{10}$$

$$w = h \cdot y_1, \delta \cdot y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x}, u_s = R \delta \cdot y_3,$$

$$u_\varphi = R \cdot y_4, \pi_s = \frac{E_I^c R \delta}{h^3} y_5, \pi_\varphi = \frac{E_I^c R}{h^3} y_6,$$

$$\sin \psi \cdot M_{ss} = h^2 E_I^c \delta \cdot y_8,$$

$$\sin \psi \cdot T_{ss} = h E_I^c \delta \cdot y_9,$$

$$\sin \psi \cdot T_{s\varphi} = h E_I^c \delta \cdot y_{10},$$

$$\sin \psi \cdot S_{ss} = h^4 \delta \cdot y_{11}, \sin \psi \cdot S_{s\varphi} = h^4 \delta \cdot y_{12},$$

$$\frac{\partial(R \sin \psi \cdot M_{ss})}{\partial s} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} +$$

$$+ \cos \psi \cdot M_{\varphi\varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot Y_s = h^2 E_I^c \delta \cdot y_7$$

Здесь и ниже  $E_I^c$  – модуль Юнга [17, 18] материала связующего первого (внутреннего) слоя оболочки.

В переменных (10), задача принимает вид:

$$A(x, D_\varphi) \frac{\partial y}{\partial x} = B(x, D_\varphi) y + \omega^2 C(x, D_\varphi) y, \tag{11}$$

$$My(0, \varphi) = 0, Ny(1, \varphi) = 0.$$

Здесь  $A, B, C$  – матрицы  $12 \times 12$ , элементы которых – полиномы от дифференциального оператора  $D_\varphi = \partial/\partial \varphi$  с коэффициентами, зависящими от  $x$ .  $M$  и  $N$  – числовые  $6 \times 12$  матрицы, имеющие следующее строение:  $M = \|E_6, O_6\|$ ;  $N = M$  для краевых условий (6) и  $N = \|O_6, E_6\|$  для условий (9), где  $E_6, O_6$  – матрицы  $6 \times 6$ , единичная и нулевая соответственно. Явный вид этих матриц не приводим ввиду громоздкости.

Отметим, что уравнения данной модели до-

пускают предельный переход [1, гл. 3, § 2], [10] к уравнениям классической теории [4, 17], основанной на постулате о недеформированных нормалях. Они получаются из уравнений (11) вычёркиванием из матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  строк и столбцов с номерами 5, 6, 11, 12. Таким образом, матрица коэффициентов классической системы имеет 8-й порядок.

Следуя [1], решение задачи (11) строим в виде ряда Фурье с векторными коэффициентами  $y_n(x)$ :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \cdot e^{inx}. \quad (12)$$

Очевидно, что представление решения в форме (12), позволяет удовлетворить условию его периодичности по координате  $\varphi$ . Подставляя это решение в уравнения и краевые условия задачи (11), и, отделяя угловую переменную, приходим к распадающимся по индексу  $n$  линейным краевым задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} y'_n(x) &= A_n^{-1}(x)B_n(x)y_n(x) + \\ &+ \omega^2 A_n^{-1}(x)C_n(x)y_n(x), \\ My_n(0) &= 0, Ny_n(1) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Элементы матриц  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  легко получить из элементов матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , выполнив преобразование  $D_\varphi \rightarrow in$ . Из системы (11) видно, что во всех уравнениях, степени оператора  $D_\varphi$ , действующего на 4, 6, 10, 12 компоненты вектора  $y$ , и степени этого оператора на компонентах с другими номерами, имеют противоположенные четности. Поэтому задачи (13) приводятся к вещественным, если элементы вектора  $y$  с номерами 4, 6, 10, 12 умножить на мнимую единицу  $i$ .

Обозначив через  $G(\xi, p)$  матрицу Грина [1, 7, 13] краевой задачи

$$y'_n(x) = A_n^{-1}(x)B_n(x)y_n(x),$$

ассоциированной с (13), перейдем к равносильной задаче определения спектра линейной однородной системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода [7, 13]

$$y_n(x) - \omega^2 \int_0^1 G_n(x, p) A_n^{-1}(p) C_n(p) y_n(p) dp = 0. \quad (14)$$

Решение (14) строим в пространстве  $L_2(0, 1)$  методом Бубнова–Галеркина [8, 16], согласно которому выберем в  $L_2(0, 1)$  полную линейно независимую систему вектор-функций  $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$  [9, 15]. Базисные функции можно выбрать непрерывными и ортонормированными и искать приближенное решение системы (14) в виде:

$$y_{nL}(x) = \sum_{k=1}^L c_k \cdot v_k(x). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и требуя ортогональ-

ности невязки ко всем координатным векторам  $\{v_k(x)\}_{k=1}^L$ , приходим к системе линейных алгебраических однородных уравнений для определения коэффициентов  $c_k$ :

$$\begin{aligned} c_i - \omega^2 \times \\ \sum_{k=1}^L c_k \int_{\psi_0}^1 \left( \int_{\psi_0}^1 G_n(x, p) A_n^{-1}(p) C_n(p) v_k(p) dp \right) v_i(x) dx \\ = 0, \quad i = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (16)$$

Внутренние интегралы в (16), согласно теореме об интегральном представлении решения краевых задач [13], являются, в силу (14), решениями краевых задач [1, 10]:

$$\begin{aligned} z'(x) &= A_n^{-1}(x)B_n(x)z(x) + \omega^2 A_n^{-1}(x)C_n(x)z(x), \\ z(0) &= 0, Nz(1) = 0, \end{aligned}$$

которые эффективно вычисляются методом инвариантного погружения, разработанному в [2, 3] и детально изложенному в [1, гл. 7]. Вычисление внешних интегралов с помощью квадратуры Симпсона [14] завершает формирование матрицы коэффициентов системы (15). Физический интерес представляют только нетривиальные решения этой системы. Для определения таких решений использовался QR-алгоритм в сочетании с приведением матрицы к верхней форме Хессенберга [19]. Оценки скорости сходимости метода относительно параметра  $L$ , а также некоторые результаты расчетов представлены ниже. При вычислениях использована структурная модель слоя, армированного двумерными волокнами [1].

В табл.1 приведены значения 6 низших собственных частот  $\omega_0, \dots, \omega_5$ , рассматриваемых как функции параметра  $L$ . Эти данные позволяют оценить скорость сходимости метода относительно  $L$ . Результаты получены для двухслойной композитной оболочки при коэффициенте волнообразования  $n = 2$ . Первый (внутренний) слой оболочки армирован в окружном направлении, а второй – в меридиональном. Приняты геометрические:

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \pi/2, \delta = \pi/3, R = 1\text{m}, R/h = 50, \\ h_1 - h_0 &= h_2 - h_1 = 0.5h \end{aligned} \quad (17)$$

механические:

$$E_1^c = E_2^c = 3000 \text{МПа}, E_1^a = E_2^a = 250 \text{ГПа}, \quad (18)$$

$$\nu_1^c = \nu_2^c = \nu_1^a = \nu_2^a = 0.3$$

$$\rho_1^c = \rho_2^c = 1250 \text{кг/m}^3, \rho_1^a = \rho_2^a = 1710 \text{кг/m}^3$$

и структурные:

$$w_1 = w_2|_{x=1} = w_{z1} = w_{z2} = 0.5,$$

$$w_2 = \sin(\psi_2 - \delta) \cdot (w_2|_{x=1}) / \sin(\psi). \quad (19)$$

параметры оболочки. Отметим, что формула (19) получена при условии армирования слоя волокнами постоянного сечения  $w_2|_{x=1}$  вдоль меридiana. Она выводится по определению интенсивности

армирования [1, гл. 2] в результате рассмотрения развертки сферического слоя.

Координатные функции в (15), были выбраны в виде

$$v_{kj}(x) = \sqrt{2k-1} P_{k-1}(2x-1) \cdot \vec{e}_j,$$

где  $P_k(t)$  – ортонормированные на отрезке  $[-1, 1]$  полиномы Лежандра [5, 12];  $\vec{e}_j$  – ортонормированные векторы стандартного базиса в декартовой системе координат  $R^{12}$  [9].

Расчеты табл. 1 – 3 выполнены при краевых условиях (9).

Из табл. 1 видно, что в рассмотренном процессе, приближение к точным значениям собст-

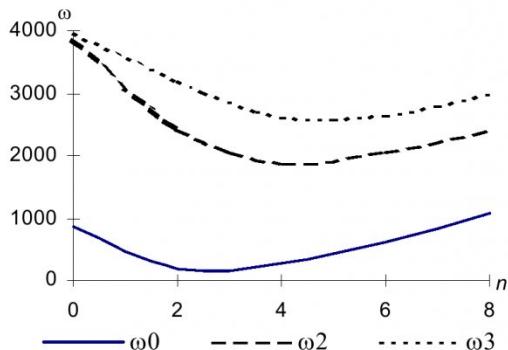


Рис. 2. Зависимость от параметра  $n$  трех низших собственных частот

венных частот осуществляется сверху. Стабилизация вычисления трех низших частот достигается при  $L = 8$ , четвертой – при  $L = 10$ , пятой и шестой – при  $L = 12$ . Расчеты показали, что полученные значения параметра  $L$  типичны, и сохраняются как при варьировании параметра  $n$ , так и при изменении условий закрепления края оболочки. Это позволило во всех дальнейших расчетах принять  $L = 12$ . Отметим, что данная оценка скорости сходимости метода согласуется с соответствующими оценками, представленными в работах [1, 10, 11].

В табл. 2 приведены результаты расчета трех низших собственных частот, рассматриваемых как функции параметра окружного волнообразования  $n$ . Данные получены для оболочки с характеристиками (17) – (19). Из таблицы следует, что неучет поперечных сдвиговых деформаций приводит к незначительному (до одного процента) за-

Таблица 1  
Оценка скорости сходимости относительно параметра  $L$ , Гц

$L$	$\omega_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
4	172.8	1736	2543	4794	6513	9589
6	172.8	1732	2434	3303	4296	5475
8	172.8	1731	2423	3188	3963	5176
10	172.8	1731	2423	3186	3936	4852
12	172.8	1731	2423	3186	3935	4813
14	172.8	1731	2423	3186	3935	4811

вышению расчетных значений собственных частот, которое увеличивается с ростом номера  $n$ . Графическая иллюстрация этих расчетов пред-

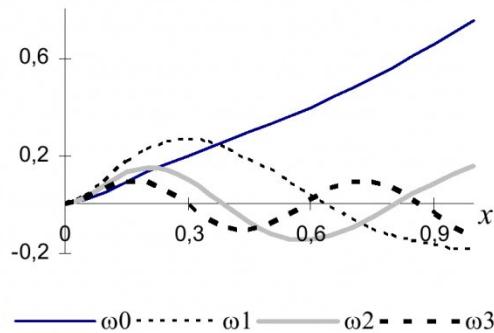


Рис. 3. Формы колебаний, соответствующие частотам  $\omega_0 – \omega_5$

ставлена на рис.2. Из графика, как и из таблицы, следует, что все рассматриваемые частоты, относительно параметра  $n$ , имеют точки минимума, на наличие которых указано в работах [1, 4, 10, 11, 17].

На рис. 3, для параметра  $n = 2$ , приведены формы собственных колебаний, соответствующие частотам  $\omega_0 – \omega_5$ . В данном примере все формы являются преимущественно изгибными. Отметим, что число обращений в нуль каждой собственной формы соответствует порядковому номеру собственной частоты.

В табл. 3 в зависимости от параметра  $R/h$ , приведены данные, позволяющие судить о степени влияния поперечных сдвиговых деформаций на расчетные значения собственных частот. Все параметры оболочки, за исключением  $R/h$ , соответствуют (17) – (19). Из таблицы видно, что по-

Таблица 2

$n$	Зависимость низших собственных частот от параметра волнообразования $n$								
	неклассическая теория			классическая теория			относ погрешность, %		
	$\omega_0$ , Гц	$\omega_3$ , Гц	$\omega_2$ , Гц	$\omega_0$ , Гц	$\omega_3$ , Гц	$\omega_2$ , Гц	$\omega_0$	$\omega_3$	$\omega_2$
0	847.4	3968	3860	847.4	3971	3860	0.00	0.08	0.00
2	172.8	3186	2423	173.9	3202	2431	0.64	0.50	0.33
4	264.1	2609	1875	265.5	2627	1881	0.53	0.69	0.32
6	620.7	2638	2074	625.4	2654	2082	0.76	0.60	0.39

грешность, вносимая неучетом сдвиговых деформаций, составляет не более 8.5% (для сравнительно толстых оболочек,  $R/h = 20$ ). Аналогичные результаты были получены и при исследовании собственных частот цилиндрической оболочки [10, 11].

В табл. 4 приведена зависимость низших собственных частот от параметра  $E = E^a_1 / E_2$ . Рассматривалась трехслойная оболочка, первый слой которой армирован в меридиональном направлении, второй – однородный изотропный, третий армирован в окружном направлении. Характеристики первого и третьего слоев описаны (17) – (19), за исключением  $h_1 - h_0 = h_2 - h_1 = h_3 - h_2 = h / 3$ . Параметры второго слоя определялись так:  $\nu_2 = \nu^a_1$ ,  $\rho_2 = \rho^a_1$ . Принимались условия жесткого закрепления краев (6). Из таблицы видно, что частоты  $\omega_0 - \omega_3$ , полученные без учета сдвига, по сравнению с соответствующими величинами, по-

лученными с учетом сдвига, завышены не более чем на 3%,  $\omega_5$  – до 4.5%. В случае осесимметричных форм соответствующие величины отличаются менее, чем на 2%.

В табл. 5 представлены результаты, характеризующие изменение низших частот в зависимости от длины  $s_1$  меридиональной дуги оболочки. Расчеты проведены для сферического пояса с жестко защемленными торцами (6). Параметры, описывающие материал, геометрию и структуру армирования, подчинены условиям (17) – (19), за исключением  $R/h = 20$ . Из таблицы следует, что погрешность, вносимая неучетом сдвига, наиболее значима для коротких оболочек достигает 60%. Отметим, что аналогичный результат был получен и при исследовании свободных колебаний ортотропной армированной цилиндрической оболочки [10, 11].

Таблица 3. Зависимость частот от параметра  $R/h$ 

$n = 0$	неклассическая теория			классическая теория			погрешность, %		
	$R/h$	$\omega_0$ , Гц	$\omega_1$ , Гц	$\omega_5$ , Гц	$\omega_0$ , Гц	$\omega_1$ , Гц	$\omega_5$ , Гц	$\omega_0$	$\omega_1$
20	847.4	2239	5179	2275	4088	5357	0.00	1.61	3.44
30	847.4	2190	4642	2210	4028	4692	0.00	0.91	1.08
50	847.4	2138	4292	2146	3971	4301	0.00	0.37	0.21
60	847.4	2121	4229	2128	3958	4234	0.00	0.33	0.12

$n = 2$	неклассическая теория			классическая теория			погрешность, %		
	$R/h$	$\omega_0$ , Гц	$\omega_1$ , Гц	$\omega_5$ , Гц	$\omega_0$ , Гц	$\omega_1$ , Гц	$\omega_5$ , Гц	$\omega_0$	$\omega_3$
20	244	4239	6329	248.7	4436	6869	1.93	4.65	8.53
30	202.8	3633	5471	205.3	3701	5537	1.23	1.87	1.21
50	172.8	3186	4813	173.9	3202	4888	0.64	0.50	1.56
60	165.9	3091	4471	166.7	3101	4518	0.48	0.32	1.05

Таблица 4 .Зависимость частот от параметра  $E$ 

$n = 2$	неклассическая теория			классическая теория			погрешность, %		
	$E$	$\omega_0$ , Гц	$\omega_3$ , Гц	$\omega_5$ , Гц	$\omega_0$ , Гц	$\omega_3$ , Гц	$\omega_5$ , Гц	$\omega_0$	$\omega_3$
10	2858	4436	6789	2863	4473	6961	0.17	0.83	2.53
30	2210	3768	5901	2216	3808	6079	0.27	1.06	3.02
50	2029	3569	5627	2036	3613	5824	0.34	1.23	3.50
70	1942	3467	5482	1949	3517	5700	0.36	1.44	3.98
100	1871	3381	5349	1879	3438	5599	0.43	1.69	4.67

Таблица 5. Зависимость частот от длины оболочки

$n = 0$	неклассическая теория			классическая теория			погрешность, %		
	$s_1/R\psi_2$	$\omega_1$ , Гц	$\omega_3$ , Гц	$\omega_5$ , Гц	$\omega_1$ , Гц	$\omega_3$ , Гц	$\omega_5$ , Гц	$\omega_1$	$\omega_3$
0.8	3815	4856	6096	3869	4921	6385	1.42	1.34	4.74
0.6	4233	5535	7532	4337	5536	8367	2.46	0.02	11.09
0.3	4301	8081	12150	4473	8081	13820	4.00	0.00	13.74
0.2	4958	9969	14970	5679	12930	19970	14.54	29.70	33.40
0.1	7754	16050	21250	13160	21250	29630	69.72	32.40	39.44

$n = 2$	неклассическая теория			классическая теория			погрешность, %		
	$s_1/R\psi_2$	$\omega_1$ , Гц	$\omega_3$ , Гц	$\omega_5$ , Гц	$\omega_1$ , Гц	$\omega_3$ , Гц	$\omega_5$ , Гц	$\omega_1$	$\omega_3$
0.8	2610	4960	7636	2632	5306	7749	0.84	6.98	1.48
0.6	3005	7009	9770	3125	8020	10280	3.99	14.42	5.22
0.3	5894	9966	13570	7233	10230	14410	22.72	2.65	6.19
0.1	8128	16090	21480	13190	21490	29650	62.28	33.56	38.04

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А.Н., Немировский Ю.В.* Многослойные анизотропные оболочки и пластины. - Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.
2. *Андреев А.Н.* О численном интегрировании уравнений осесимметричного изгиба слоистых оболочек вращения методом инвариантного погружения. -Сб. научных трудов АН СССР Сиб. отд-ие Инт. гидродинамики -Новосибирск, 1985. вып. 73, с137—148 с.
3. *Андреев А.Н., Немировский Ю.В.* Численный анализ напряженно-деформированного состояния слоистых оболочек вращения методом инвариантного погружения. -Изв АН АрмССР Механика, 1989. Т. 42, № 1, с137—148 с.
4. *Богданович А.Е.* Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. -Рига: Зиннатне, 1987. 295 с.
5. *Бронштейн И. Н., Семеняев К. А.* Справочник по математике -Л.: Гостехиздат, 1948, 556 с.
6. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. -М.: Наука, 1979. 383 с.
7. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. -М.: Наука, 1959. 655 с.
8. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. -М.: Наука, 1970. 512 с.
9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. -М.: Наука, 1984. 752 с.
10. *Петрушева И. И.* Свободные колебания упругой многослойной цилиндрической оболочки. — Вестн.КузГТУ, 2003, №3, с 8—17
11. *Петрушева И. И.* Свободные колебания слоистой упругой цилиндрической оболочки. / Труды XVIII межреспубл. конференции Кемерово, 1-3 июля 2003 -Новосибирск, 2003, с140—145
12. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. -М.: Наука, 1974. Т.3. Ч.2. -672 с.
13. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. -М.: Наука, 1974. Т.4. Ч.1,2. -880 с.
14. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. -М.: Наука, 1974. Т.1. -480 с.
15. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. -М.: Наука, 1974. Т.2. -655 с.
16. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. -М.: Наука, 1977. -656 с.
17. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластиинки и оболочки. -М.: Наука, 1966. 635 с.
18. *Тимошенко С.П.* Курс сопротивления материалов -Л.: Гос. изд-во им. Н. Бухарина, 1929. 587 с.
19. *Уилкинсон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. -М.: Наука, 1970.

Автор статьи:

Петрушева

Ирина Ивановна

- старший преподаватель каф. прикладной математики

**УДК 519. 21**

**А.В. Бирюков**

## **СЕЙСМИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ ПОРОДНЫХ МАССИВОВ**

Характерной особенностью всех породных массивов является наличие естественных трещин, рассекающих массивы на структурные блоки или естественные отдельности. Геометрическая картина трещиноватости зависит от геологогенетических факторов, влияющих на процесс образования трещин.

В осадочных породах трещины образуют системы, в каждой из которых случайная вариация параметров пространственной ориентировки трещин

незначительна, т. е. плоскости трещин практически можно считать параллельными. В магматических породах системы трещин не наблюдаются, трещиноватость хаотична.

При прохождении через массив сейсмической волны трещина является своего рода экраном, на котором происходит скачкообразное снижение скорости волны и напряжения на ее фронте. Следовательно, эти параметры волны зависят от частоты трещин в заданном направлении, что служит причи-

ной сейсмической анизотропии породного массива.

Рассмотрим массив, рассеченный  $m$  системами плоскостей-трещин, полагая плоскости в каждой системе параллельными. Пространственную ориентировку трещин  $i$ -й системы определяет вектор  $\bar{n}_i$ , ортогональный плоскостям системы. Модуль этого вектора положим равным частоте трещин данной системы, т. е. среднему числу трещин в направлении  $\bar{n}_i$ , приходящемуся на единицу длины.