

УДК 539. 375+ 622.235

Г.А. Казунина, Л.В. Баринова

СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КЛАСТЕРОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ В НАГРУЖЕННЫХ МАТЕРИАЛАХ

Одной из важных проблем физики разрушения является прогнозирование ресурса долговечности нагруженных материалов по характеристикам акустической и электромагнитной импульсной эмиссии [1–3].

Решение этой проблемы сталкивается со следующей принципиальной трудностью. Случайный процесс импульсной эмиссии несет информацию о кинетическом процессе накопления элементарных повреждений, фиксирует образование новых или «прорастание» уже имеющихся элементарных повреждений. Однако, характеристики случайного процесса импульсной эмиссии не несут непосредственной информации о пространственном распределении элементарных повреждений, их группировке в кластеры и характеристиках этих кластеров. В то же время именно пространственное распределение элементарных повреждений представляет главный интерес для прогнозирования разрушения.

Кластерная структура элементарных повреждений в нагруженных материалах по степени изученности существенно отстает от исследования процесса накопления элементарных повреждений, что обусловлено следующей причиной.

Непосредственное наблюдение кластерной структуры элементарных повреждений доступно лишь при помощи таких сложных и трудоемких методов, как спектроскопия грубого рассеяния света (на прозрачных материалах) и при помощи рассеяния рентгеновских лучей для непрозрачных материалов, что практически невозможно реализовать в динамике.

Поскольку экспериментальное исследование одновремен-

ного наблюдения накопления повреждений и образуемой ими кластерной структуры на настоящем уровне развития технологии не представляется возможным, своевременным и актуальным является проведение подобного исследования при помощи методов компьютерного моделирования, которое предоставляет доступную и одновременно уникальную возможность исследования кинетического процесса накопления элементарных повреждений и эволюции их кластерной структуры как единого процесса пространственно-временной эволюции распределенной динамической системы.

Настоящая работа посвящена исследованию статистических распределений кластеров элементарных повреждений, полученных при помощи вероятностного клеточного автомата, описанного в [4, 5]. Реализация использованных алгоритмов частично представлена в [6].

Моделируемая система представляет собой решетку – набор ячеек с целочисленными координатами, каждая из которых может находиться в поврежденном или неповрежденном состоянии. Влияние механического напряжения на образование элементарных повреждений в узлах решетки моделируется при помощи следующих вероятностей.

1. Вероятность образования элементарного повреждения

$$P_{occ}(\vec{x}) = P_{occ}(T) \cdot \exp(\gamma\sigma(\vec{x})/kT)$$

определяется «плавными», усредненными на пространственных масштабах, существенно превышающих размер отдельного элементарного повреждения, механическими напряжениями, которые задаются кон-

кретными условиями нагружения материала. Сомножитель $P_{occ}(T) = U_0 \cdot \exp(-U/kT)$ определяется энергетическим барьером образования элементарного повреждения.

2. Вероятность «прорастания» элементарного повреждения

$$P_{spr} = P_{spr}(T) \times \div \exp\left(\frac{\gamma\sigma_{av}}{kT} \left(\sqrt[4]{R^2} - \sqrt[4]{R_0^2} \right) \right)$$

определяется локальной концентрацией механического напряжения вблизи границ имеющегося элементарного повреждения (кластера) и зависит от его среднеквадратичного радиуса. Здесь \bar{R}_0^2 – среднеквадратичный размер радиуса из одного элементарного повреждения, а $P_{spr}(T)$ – начальное значение вероятности прорастания.

3. Вероятность объединения кластеров, сблизившихся на критическое расстояние P_{ass} .

Элементарные повреждения, локализующиеся на соседних узлах решетки, объединяются в кластеры по некоторому правилу, определяемому только геометрией решетки.

Текущая конфигурация элементарных повреждений образует фрактальную кластерную структуру, которая характеризуется числом кластеров и характеристиками каждого кластера: числом элементарных повреждений в кластере («масса кластера»), среднеквадратичным радиусом кластера R , размерами M, N кластера по вертикали и горизонтали. Среднеквадратичный радиус кластера произвольной формы определяется путем суммирования по всем его ячейкам, если координаты узла решетки задаются парой целых чисел (n, m) :

$$\bar{R}^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{\text{Mass}_{(n,m)}} \sum (n^2 + m^2) - \left(\frac{1}{\text{Mass}_{(n,m)}} \sum n \right)^2 - \left(\frac{1}{\text{Mass}_{(n,m)}} \sum m \right)^2.$$

Такое определение полностью согласуется с непрерывным случаем, когда среднеквадратичный радиус кластера из одной квадратной ячейки с единичной стороной $\bar{R}^2 = 1/6$ и позволяет упростить обработку результатов моделирования в логарифмических координатах.

Временная эволюция кластерной структуры элементарных повреждений осуществляется при помощи дискретных временных шагов (циклов), в ходе которых происходят переходы узлов решетки из неповрежденного в поврежденное состояние. Конечной стадией эволюции кластерной структуры элементарных повреждений является конфигурация, в которой образуется соединяющий кластер. Образование соединяющего кластера интерпретируется как разрушение блока, а время образования соединяющего кластера (число циклов) отождествляется с временем разрушения.

Ниже представлены результаты исследования статистических распределений характеристик кластерной структуры для однородного статического сценария накопления элементарных повреждений, определяемого следующими вероятностями переходов: $P_{occ}=0.001$, $P_{spr}=0.2$, $P_{ass}=0.2$. Плотность элементарных повреждений (концентрация дефектов), при которой происходит разрушение системы составила $\rho_{fin}=0.29$ с точностью $\leq 10\%$.

Моделирование проводилось на решетке размером 256×256 . Каждая зависимость характеристик кластеров получена по нескольким реализациям.

Пример визуализации кластерной структуры, профильт-

рованной по размерам кластеров представлен на рис.1.

Для исследуемого режима моделирования наблюдаемая кинетическая зависимость общего числа кластеров имеет типичный вид асимметричного колокола [7], когда первоначальное накопление кластеров по квадратичному закону до значений переходит в линейное убывание вплоть до появления соединяющего кластера. Для удобства сравнения все зависимости представлены в нормированных координатах. По оси абсцисс отложено отношение числа циклов к полному числу циклов до появления соединяющего кластера: T/T_{fin} (относительное время).

Наиболее удобно статистические распределения кластеров можно проследить по эмпирическим функциям распреде-

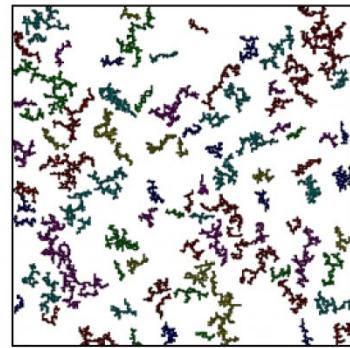


Рис.1. Кластеры со среднеквадратичным размером $12 < |R| < 32$ на решетке 256×256

ления, построенным по следующим правилам[8]:

$F_N(R)$ = суммарное число кластеров, размер которых не превосходит R ,

$F_M(R)$ = суммарная масса кластеров, размер которых не превосходит R .

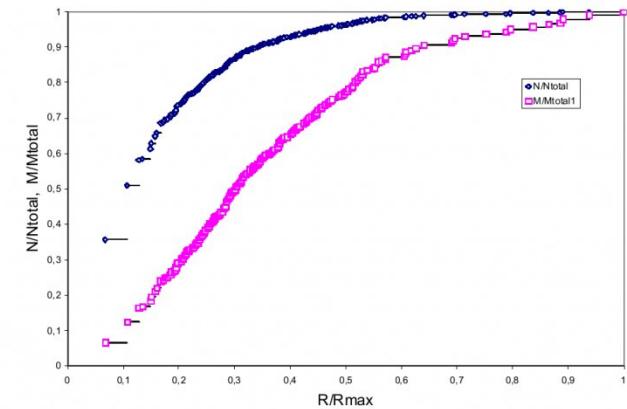


Рис.2а. Функция распределения числа (верхняя кривая) и массы кластеров по размерам: $T/T_{fin}=0.3$

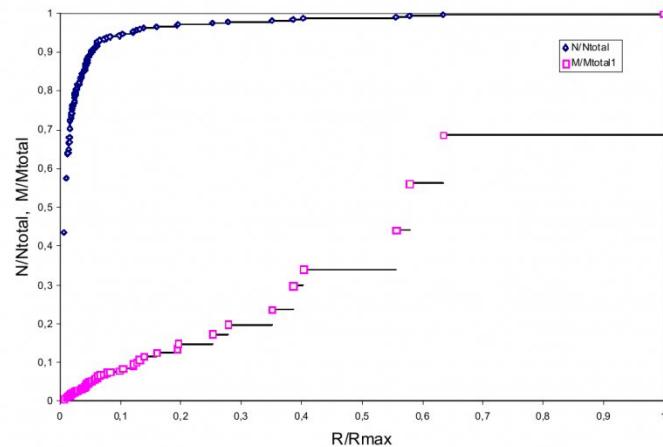


Рис. 2б. Функция распределения числа (верхняя кривая) и массы кластеров по размерам: $T/T_{fin}=0.9$

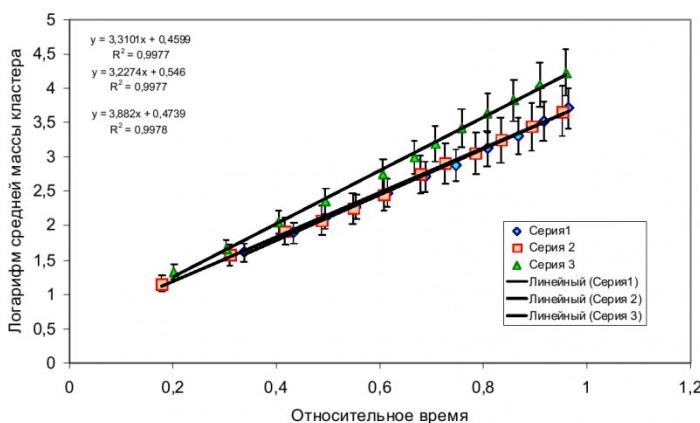


Рис. 3 Зависимость логарифма средней массы кластеров повреждений от числа циклов до разрушения (относительного времени T/T_{fin})

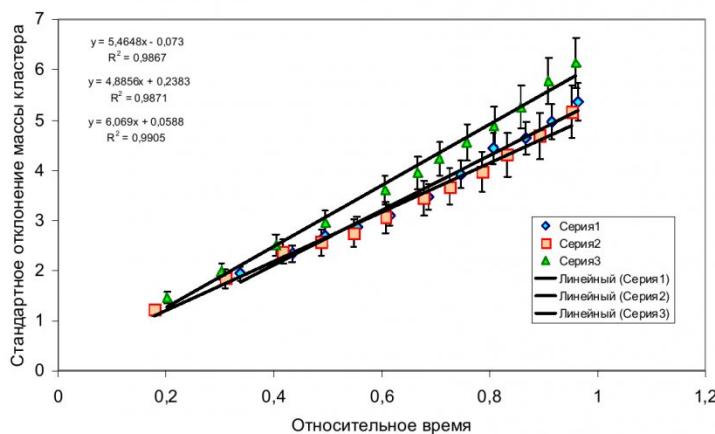


Рис. 4. Зависимость логарифма стандартного отклонения распределения масс кластеров повреждений от числа циклов до разрушения (относительного времени T/T_{fin}).

Пример таких функций распределения для типичной серии моделирования приведен на рис. 2а для значений относительного времени $T/T_{fin}=0.3$ и на рис.2б для $T/T_{fin}=0.9$.

При построении функций распределения использованы нормированные координаты: «Масса/полная масса – Радиус/максимальный радиус». По приведенным функциям распределения прослеживается общая качественная тенденция изменения кластерной структуры по мере роста концентрации дефектов и приближения к разрушению. Если для $T/T_{fin}=0.3$ имеет место протяженный квазинепрерывный участок резко сужается. Функция распределения становится ступенчатой, что свиде-

то для $T/T_{fin}=0.9$ квазинепрерывный участок резко сужается. Функция распределения становится ступенчатой, что свиде-

моделируемой системе кластеров промежуточного радиуса.

Получены числовые характеристики распределения кластеров по массам и радиусам, которые имеют следующие особенности. По мере приближения к разрушению средняя масса кластера повреждений \bar{M} экспоненциально растет, увеличиваясь примерно в 8 раз. Временная зависимость логарифма средней массы кластера (рис.3) является статистически значимой линейной зависимостью (коэффициент детерминации $R^2=0.98$).

Однако максимальное наблюдаемое значение средней массы кластера в абсолютных единицах $\bar{M} \sim 40$ единиц в сотни раз меньше массы возникающего соединяющего кластера, которая составляет примерно 10000 единиц массы. Среднеквадратичное отклонение (стандартное отклонение) для массы кластера σ_M по мере приближения к разрушению также возрастает по экспоненте, увеличиваясь примерно в 40 раз. Временная зависимость логарифма стандартного отклонения массы кластера также является статистически значимой линейной зависимостью ($R^2=0.99$), как показано на рис.4.

Соответственно вариация распределения масс кластеров

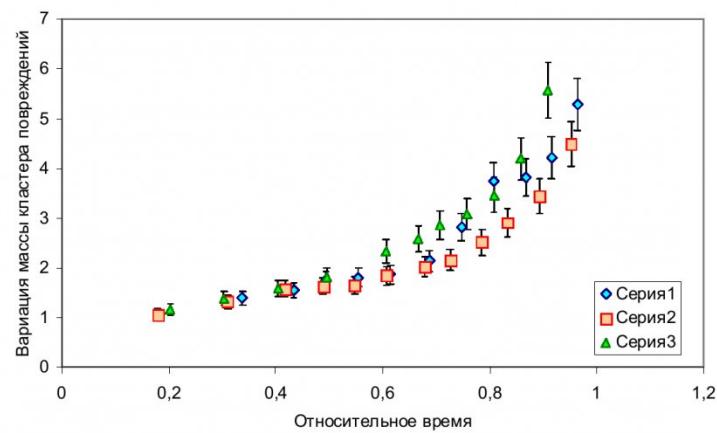


Рис. 5. Зависимость вариации распределения масс кластеров повреждений от числа циклов до разрушения (относительного времени T/T_{fin})

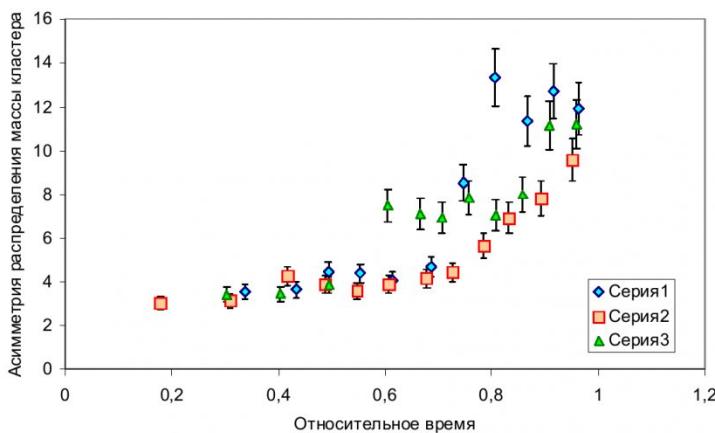


Рис.6. Зависимость асимметрии распределения массы кластеров повреждений от числа циклов до разрушения (относительного времени T/T_{fin})

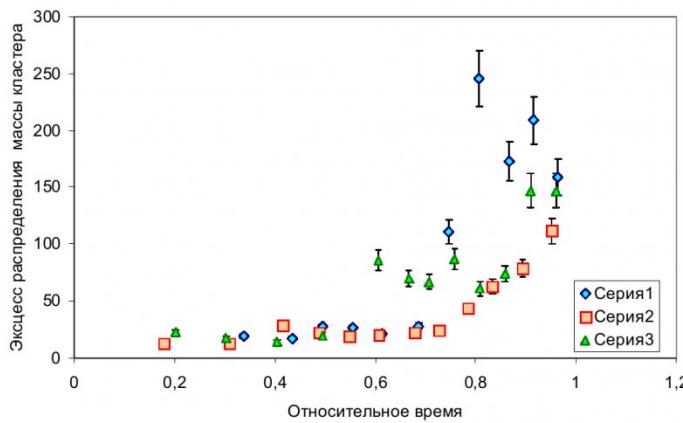


Рис.7. Зависимость эксцесса распределений массы кластеров повреждений от числа циклов до разрушения (относительного времени T/T_{fin}).

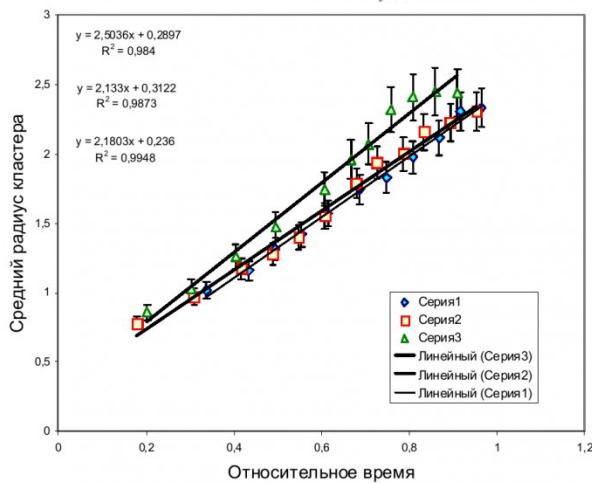


Рис. 8. . Зависимость среднего радиуса кластера повреждений от числа циклов до разрушения (относительного времени T/T_{fin})

$V_M = \frac{\sigma_M}{M}$ возрастает при этом

от значения $V_M \approx 1$ до значения $V_M \approx 5.5$ (рис. 5). Заметим, что для относительного времен

$T/T_{fin} > \sim 0.7$ наблюдается увеличение скорости роста вариации.

Характеристики распределения масс кластеров, определяемые моментами более высо-

ких порядков, такие как асимметрия A_s (рис.6) и эксцесс E_s (рис.7) также возрастают по мере эволюции системы. Распределение становится все более асимметричным и острорвешинным. При этом для относительного времен и $T/T_{fin} > \sim 0.7$ наблюдается резкое увеличение как асимметрии, так и эксцесса.

Средний радиус кластера линейно растет по мере приближения к разрушению (рис.8). При этом зависимость является статистически значимой ($R^2=0.995$) и адекватной, что подтверждается сравнением остаточной дисперсии и дисперсии случайности

Стандартное отклонение радиуса кластера σ_R растет при этом по экспоненте, увеличиваясь примерно в 9 раз. Логарифм стандартного отклонения радиуса кластера линейно растет со временем (рис.9).

Одновременно вариация радиуса кластера $V_R = \frac{\sigma_R}{R}$ возрастает по мере приближения к разрушению от значения $V_R \sim 0.7$ примерно в 4 раза (рис.10).

Асимметрия и эксцесс распределения кластеров по радиусам возрастают с приближением к разрушению примерно в 3,5 и 8 раз соответственно (рис. 12, 13). Как и для распределения масс кластеров для относительного времени $T/T_{fin} > \sim 0.7$ наблюдается резкое увеличение как асимметрии, так и эксцесса распределения. При этом максимальное значение среднего радиуса в абсолютных единицах $\bar{R} \approx 2,4$ значительно меньше радиуса соединяющего кластера, составляющего примерно $R \sim 90$.

Полученные числовые характеристики распределения кластеров, а также их временная зависимость показывают, что закон распределения кластеров повреждений по массам и размерам является сложным, изменяющимся по мере прибли-

жения к разрушению. На начальном этапе эволюции системы закон распределения кластеров повреждений как по массам, так и по радиусам близок к показательному закону. Об этом свидетельствует значение вариации распределений, близкое к единице и значение коэффициента асимметрии, близкое к двум. Однако в ходе эволюции системы вид распределений изменяется. Существенной отличительной чертой распределений кластеров как по радиусам, так и по массам является наличие все более растягивающихся по мере приближения к разрушению хвостов распределений. Это свидетельствует о том, что кластеры больших размеров появляются с малой вероятностью, но именно такие кластеры определяют поведение системы. При этом появляются интервалы радиуса, на которых кластеры отсутствуют. С приближением к разрушению длина этих интервалов возрастает. Это говорит об отсутствии в системе кластеров некоторых относительно больших размеров.

Поведение распределений кластеров по массам и размерам, а также временная эволюция их числовых характеристик, в частности сильный рост дисперсии и вариации распределений, появление на фоне кластеров типичных размеров нескольких крупных кластеров вплоть до соединяющего кластера, а также перемежаемость (появление интервалов изменения радиуса, которые не приводят к приращению массы) свидетельствуют о том, что моделируемая система демонстрирует поведение неравновесной системы, склонной к катастрофам [9,10].

Отличительной чертой таких систем являются степенные законы распределений вероятностей с плотностью вида:

$$p(x) \approx x^{-(1+\alpha)},$$

где показатель α лежит в диапазоне от нуля до единицы.

Статистика величин, описываемых такими распределе-

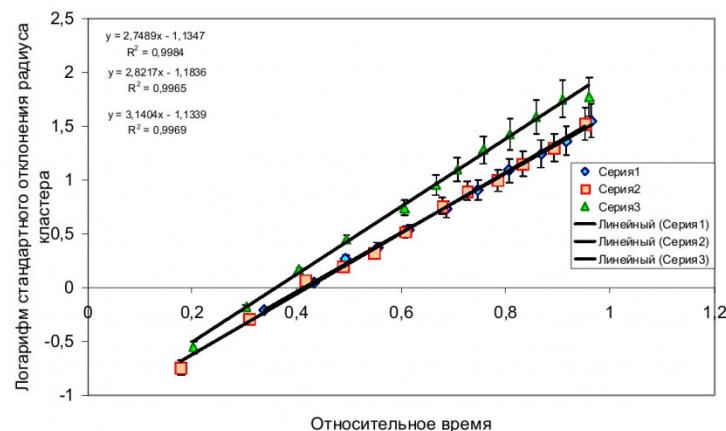


Рис. 9. Зависимость логарифма стандартного отклонения радиуса кластера повреждений от числа циклов до разрушения (относительного времени T/T_{fin})

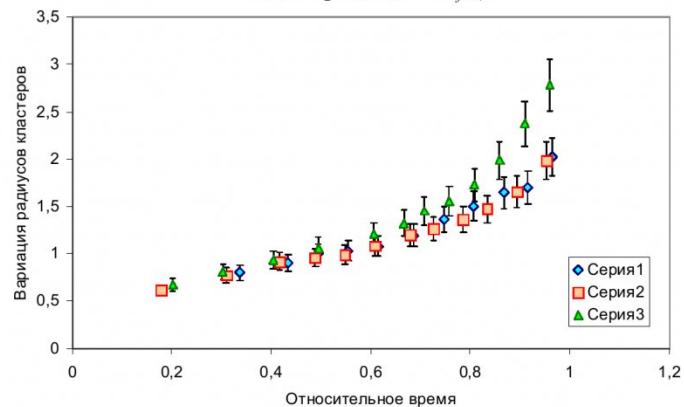


Рис. 10. Зависимость вариации радиуса кластера повреждений от числа циклов до разрушения (относительного времени T/T_{fin}).

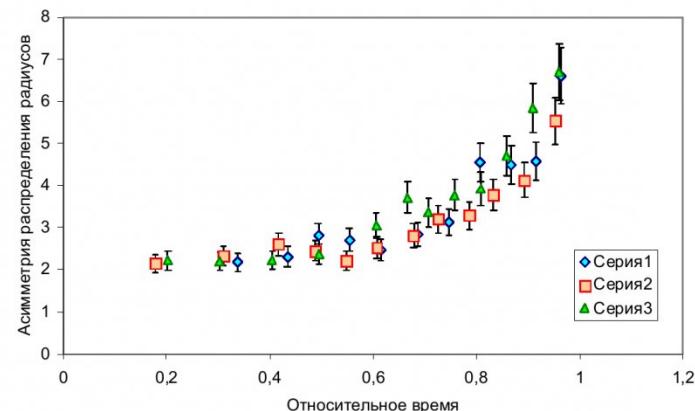


Рис. 11. Зависимость асимметрии распределения радиусов кластеров повреждений от числа циклов до разрушения (относительного времени T/T_{fin}).

ниями, характеризуется тем, что крупные события, приходящиеся на хвост распределения, происходят не настолько редко, чтобы ими можно было пренебречь. Природа степенных законов распределения связана с сильной взаимозависимостью происходящих событий, когда

возмущение лавинообразно нарастает. Оценка параметра подобия $\alpha \sim 0.7$, полученная с точностью 10 % по угловому коэффициенту наклона логарифма плотности вероятности (рис. 13) близка к значению, характерному для закона Гутенберга-

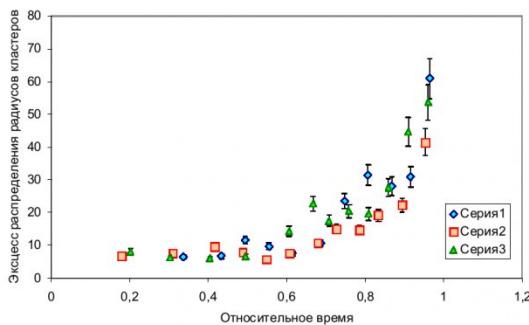


Рис. 12. Зависимость эксцесса распределения радиусов кластеров повреждений от числа циклов до разрушения(относительного времени T/T_{fin})

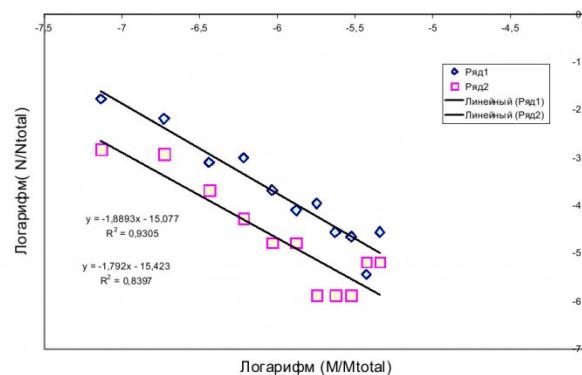


Рис.13. Плотность вероятности распределения масс кластеров повреждений в дважды логарифмических координатах для значений $T/T_{fin}=0.3$ (ряд 1) , $T/T_{fin}=0.9$ (ряд 2)

Рихтера зависимости количества землетрясений от их энергии [12].

Отметим, что относительное время $T/T_{fin} \sim 0.7$ (концентрация дефектов $\rho \approx 0.7 \rho_{fin}$), при котором происходит переход от квазинепрерывной функции

распределения к ступенчатой соответствует времени появления особенностей на временных зависимостях вариации, асимметрии и эксцесса распределений. Это позволяет сделать предположение о том, что данная концентрация де-

фектов соответствует не обратному переходу к разрушению системы.

Авторы благодарят профессора Д.В. Алексеева за полезные обсуждения в ходе выполнения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Томилин Н.Г., Дамаскинская Е.Е., Куксенко В.С. Формирование очага разрушения при деформировании гетерогенных материалов (гранита) // ФТТ.– 1994.–т.36 – , № 10. –с. 3101 – 3112.
- 2.Курленя М.В., Вострецов А.П., Кулаков Г.И., Яковицкая Г.Е. Регистрация и обработка сигналов электромагнитного излучения горных пород.– Новосибирск: Издательство СО РАН – . 2000. – 219с.
- 3.Алексеев Д.В., Егоров П.В. Перsistентность накопления трещин при нагружении горных пород и концентрационный критерий разрушения // Докл. АН , 1993. – т.333.–№ 5.–с.45 – 49.
4. Алексеев Д.В., Казунина Г.А. Вероятностный клеточный автомат для моделирования накоплений элементарных повреждений в нагруженных материалах.// Материалы конференции « Геодинамика и напряженное состояние недр Земли ».– Новосибирск . – 2003.
5. Алексеев Д.В., Казунина Г.А. Вероятностный клеточный автомат для моделирования кинетики кластеров на двумерной решетке // Моделирование неравновесных систем.–Материалы VII Всеросс. семинара.– Красноярск: 2004. С.6 – 7.
6. Алексеев Д.В. Компьютерное моделирование физических задач в Microsoft Visual Basic 6.0 . М.: СОЛООН – Пресс – 2004.– 528 с.
7. Алексеев Д.В., Казунина Г.А. Кинетика перколоационных кластеров на квадратной решетке // Моделирование неравновесных систем. –Материалы VII Всеросс. семинара.– Красноярск: 2004. С.4 – 5.
8. Казунина Г.А. Автомодельность функций распределения кластеров на квадратной решетке // Моделирование неравновесных систем. Материалы VII Всеросс. семинара. - Красноярск: 2004. С.71–72.
9. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы.– Ижевск: НИЦ « Регулярная и хаотическая динамика », 2001.– 528с.
10. Подлазов А.В. Самоорганизованная критичность и анализы риска // Изв. ВУЗов «Прикладная нелинейная динамика ». 2001, т.9, №1. С.49. 88

□ Авторы статьи:

Казунина
Галина Алексеевна
– канд. физ.- мат. наук, доц. каф.
высшей математики

Баринова
Любовь Валерьевна
– асс. каф. высшей математики