ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГРАНУЛОМЕТРИЯ

Рассмотрим дисперсную систему из частиц случайных размеров. Пусть x – наибольший линейный размер или диаметр частицы, который как случайная величина распределен с плотностью $f(x)$, моментами $m(k)$, равными математическому ожиданию k-й степени диаметра.

Форму частицы характеризуем мерами сферичности α и β, равными отношениям площади поверхности и объема частицы к квадрату и кубу диаметра. В силу экстремальных свойств шара $\alpha < \pi$, $\beta < \pi/6$.

Без ущерба для точности гранулометрических расчетов меры сферичности частицы можно считать постоянными. В этом случае математические ожидания площади поверхности и объема частицы имеют вид $\alpha m(2)$ и $\beta m(3)$.

Отношение этих величин $s=\alpha\, m(2)\ /\ \beta\, m(3)$ равно суммарной площади поверхности частиц в одиночном объеме и играет основную роль в процессах дробления.

При дроблении геоматериалов энергоемкость дробления ε равна количеству энергии, затрачиваемой на образование единицы площади новой поверхности. Поэтому энергия дробления материала единичного объема равна εs.

Каждой частице дисперсной системы поставим в соответствие ее количественную характеристику $t(x) = cx^k$, $c=const$. Тогда содержание в дисперсной системе фракции с диаметрами частиц, меньшими x, равно результату интегрирования отношения $x^k f(x)/\, m(k)$ в границах $(0, x)$.

Полученную в результате интегрирования гранулометрическую функцию обозначим через $\varphi(x,k)$. Эта функция монотонно возрастает с увеличением x и монотонно убывает с увеличением k. При значениях k, равных 0,1,2,3, она дает описание фракционного состава дисперсной системы соответственно по числу частиц, по их суммарной длине, суммарной площади поверхности и суммарному объему.

Некоторые вопросы гранулометрии связаны с поиском закона распределения случайной величины $t(x) = cx^k$. При известной плотности распределения диаметра частиц $f(x)$ плотность распределения t-характеристики частиц нетрудно найти. Она имеет вид $g(t) = f\left[(t/c)^{1/k}\right] /\ ck(t/c)^{1-1/k}$.

Отсюда при k, равном двум и трем имеем плотности распределения для площади поверхности и объема частицы с заменой параметра с на меры сферичности α и β.

Большинство дисперсных систем является неоднородными по той причине, что мелкие частицы под действием силы тяжести просеиваются в нижнюю часть трехмерной области, содержащей частицы.

Обозначим через A множество всех частиц дисперсной системы, а через B – множество частиц на ее поверхности. Выборка, полученная измерениями частиц из B, не является репрезентативной для частиц множества A. Поэтому возникает необходимость в установлении взаимосвязи между гранулометрическими характеристиками частиц множеств A и B.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – плотности распределения диаметра частиц множеств A и B, а $m(k)$ и $n(k)$ – математические ожидания k-й степени диаметра частиц этих множеств. Поскольку содержание частиц в B превосходит их содержание в A, то существует такое значение диаметра частиц x_0, для которого $f(x) > g(x)$ при $x<x_0$ и $f(x) < g(x)$ при $x>x_0$. Этому условию удовлетворяет соотношение $f(x)=(x_0/x)^p g(x)$, где p - параметр, определяемый экспериментально.

Интегрирование этого равенства по всем значениям диаметра частиц дает искомую взаимосвязь $n(k) = m(k+p)\ /\ m(p)$. Так, для экспоненциального закона содержание фракции $x>m(1)$ в A и B равно соответственно $exp(-1) \sim 0.39$ и $exp(-1/(p+1))$. Для $p=$ 1,2,3 содержание этой фракции в B составляет 0,63; 0,72; 0,78.

Крупность частиц дисперсной системы иногда удобно характеризовать средней величиной. Операция усреднения состоит в мысленной замене реальной совокупности частиц гипотетической, в которой все частицы имеют одинаковый диаметр u, называемый средним диаметром. Если инвариантами усреднения являются число частиц и их суммарная t - характеристика, то уравнение усреднения имеет вид $u^k=m(k)$.

Другой средней характеристикой крупности частиц служит средневзвешенный диаметр $u(k)$, равный интегралу от произведения диаметра x на дифференциал функции $\varphi(x,k)$. В этом случае $u(k)= m(k+1) / m(k)$.

Эмпирирические распределения диаметра частиц во многих случаях адекватно аппроксимирует симметричное бета – распределение с плотностью $f(x)=6x(1-x)$, $x\in(0,1)$, где за масштабную единицу принято наибольшее значение диаметра. При этом $m(k)=6/(k+2)(k+3)$, $\varphi(x,k)=(k+3)x^{k+2}$ -$(k+2)x^{k+3}$.

В природе дисперсные системы широко представлены массивами горных пород, рассеченными естественными трещинами на структурные блоки.

Если трещины в массиве располагаются хаотически, то геометрической моделью является разбиение пространства пуассоновским множеством плоскостей с параметром λ, равным среднему числу плоскостей пересекающих единичный отрезок прямой произвольного направления.

Для такой модели Майлз нашел математические ожидания площади поверхности и объема структурного блока, равные $24/\pi\lambda^2$ и $6/\pi\lambda^3$. Их отношение $s=4\lambda$ равно суммарной площади поверхности структурных блоков в единичном объеме.

Таким образом, энергия естественного дробления породного массива, отнесенная к единичному объем, составляет $4\lambda\varepsilon$. Эмпирически установлено, что энергоемкость дробления горных пород ε пропорциональна пределу их прочности при одноосном сжатии. Причем, если единицами измерения энергоемкости дробления и предела прочности являются килоджоули на квадратный метр и мегапаскали, то коэффициент пропорциональности равен единице.

Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич,
докт.техн.наук, проф.каф.
высшей математики КузГТУ.
Email: bav.vm@kuzstu.ru.