ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 519.6:004

М.А. Тынкевич, Д.Е. Несмелов

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ (ИНТЕРАКТИВНАЯ ГРАФИКА В СРЕДЕ MATLAB)

Знакомство с миром т. н. замечательных математических кривых, возникших в свое время из потребностей механики и астрономии, является, конечно, лишь крошечным элементом математической культуры – существенного элемента общей культуры человека, интеллектуально мыслящего и способного ориентироваться в усложняющемся информационном мире. В этом мире, рядом с общеизвестными (!?) окружностью или эллипсом, соседствуют спирали Архимеда, Галилея, Ферма и Корню, улитка Паскаля, лемниската Бернулли, декартов лист и другие геометрические конструкции, названные по имени их создателей или в знак благодарности потомков знаменитым ученым прошлого.

Знакомство с этим миром полезно не только историкам математики или преподавателям теоретической механики, но и преподавателю точных наук для стимуляции любопытства ученика или воспитания у него чувства прекрасного (на рис.1 приведены необычные орнаменты, получающиеся сочетанием математического знания и искусства программирования). Услышав название «конхоида Никомеда» и увидев ее, современный, не лишенный любопытства школьник, конечно, обратится в Интернет и, между делом, узнает о существовании Древней Греции и о том, как трудно разделить угол на три равные части или «откуда есть и пошли точные, естественные и сверхестественные науки»

Целенаправленный поиск в Интернете обнаруживает множество текстовой и графической информации об искомой конкретной функции, в том числе демонстрационных примеров, выполненных с исключительным изяществом .

Тем не менее представляет интерес программная реализация, обеспечивающая возможность построения любой из фиксированного, но достаточно широкого множества кривых и ее дочерних, нестандартных конструкций.

Так в 2003 г. студентами КузГТУ Волковым С.А., Веревкиным М.А. и Шинкаревой Д.Д. [2] под руководством автора была построена соответствующая программа, использующая унифицированный подход к представлению данных. При таком подходе любая кривая может быть отображена без написания дополнительного программного кода хранением информация о кривых в формате XML

В основу нашей программной реализации положено представление кривых в параметрическом задании $x=R(P, t)\cdot\cos \mu t$, $y=R(P, t)\cdot\sin \mu t$, $t \in [t_0, t_k]$, где P – совокупность параметров кривой. Исключение из общего правила составляют только овалы Кассини в варианте их распада на отдельные фрагменты, где удобнее использование представления в декартовых координатах.

Состав семейства программных реализаций

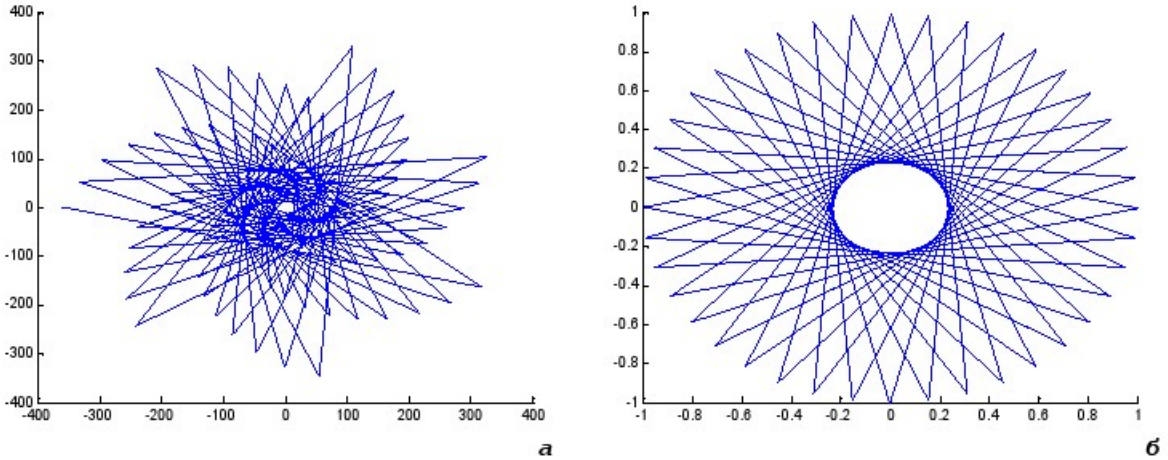

Рис. 1. а) Спираль $x= t\cdot\cos(t)$; $y=\cdot\varphi\sin(t)$;· t=0 :1.15: 115,1;
б) Окружность $x= \cos t$; $y=\cdot\sin t$;· t=(0:1.15: 230,1)

(см. таблицу), как нам кажется, достаточно широк и за его пределами остались лишь немногие из упоминаемых в математической литературе [3].

Программа реализует демонстрацию построения графиков кривых в интерактивном режиме. Пользователь имеет возможность выбрать конкретную кривую, согласиться с задаваемыми по умолчанию параметрами кривой или экспериментировать с различными их сочетаниями (в частности, математические выражения для начала, конца и шага по интервалу значений *t*, например pi/32). Более того, построение графического объекта здесь происходит в динамике – не конечный результат, а появление рисунка с выбранным уровнем замедления (3 уровня), что способствует уяснению самого процесса построения объекта. Любая из упомянутых корректур выполнима а любом этапе рисования.

Состав пакета замечательных математических кривых

Окружность и ее производные	$x = R\,Cos\,2\pi t$, $y = R\,Sin\,2\pi t$, $t \in [0, 1]$.	При шаге $h_t \neq 1/k$, где k – целое, звездоподобные фигуры, многоугольники и орнаменты, вписанные в кривую	
Эллипс и его производные	$x = a\,Cos\,2\pi t$, $y = b\,Sin\,2\pi t$, $t \in [0, 1]$.		
Астроида и ее производные	$x = R\,Cos^3(2\pi t/4)$, $y = R\,Sin^3(2\pi t/4)$, $t \in [0,4]$	То же при шаге $h_t \neq 4/k$	
Розы (кривые Гвидо Гранди)	$x = R\,sin(2\pi kt)Sin\,2\pi t$, $y = R\,sin(2\pi kt)Cos\,2\pi t$.	При нечетном $k=m/n$ k лепестков, при четном – $2k$.	
Кривые Хабенихта	$x = R \cdot Cos\,2\pi t$, $y = R \cdot Sin\,2\pi t$, $R = A + B \cdot Cos(2\pi kt) + C \cdot Sin^2(2\pi kt) + D \cdot Sin^4(2\pi kt)$	k - лепестковость; A,B,C,D - форма, вытянутость и изрезанность лепестков, махровость цветка.	
Улитка Паскаля	$x = (R \cdot Cos\,2\pi t + L)\,Cos\,2\pi t$ $y = (R \cdot Cos\,2\pi t + L)\,Sin\,2\pi t$, $t \in [0, 1]$, $L > 0$.		
Конхоида Никомеда	$x = (A / Cos\,2\pi t \pm L)\,Cos\,2\pi t$ $y = (A / Cos\,2\pi t \pm L)\,Sin\,2\pi t$, $-0.25 < t < 0.25$		
Декартов лист	$x = R \cdot Cos\,2\pi t$; $y = R \cdot Sin\,2\pi t$, $R = 3A/2 \cdot Sin(4\pi t) / (Cos^3(2\pi t) + Sin^3(2\pi t))$, $-0.125 < t < 0.375$		
Декартов овал	$x = R \cdot Cos\,2\pi t$; $y = R \cdot Sin\,2\pi t$, R - *корень уравнения* $(M^2-1)R^2 - 2R(M^2 d\,cos2\pi t - A) + (Md)^2 - A^2 = 0$	$M \neq 1$ - два овала; $M=1$, $A>D$ - эллипс;. $M=-1$, $A<D$ – гипербола; $M=A/d$ - улитка Паскаля.	
Лемниската Бернулли	$x = \pm R \cdot Cos\,2\pi t$; $y = R \cdot Sin\,2\pi t$, $R = A\sqrt{2\lvert Cos(4\pi t)\rvert}$, $-0.125 < t < 0.125$		
Трактриса	$x = \pm\left[A \cdot ln\frac{A - \sqrt{A^2 - t^2}}{\lvert t\rvert} + \sqrt{A^2 - t^2}\right]$, $y = t$, $0 < t < A$	При вращении вокруг оси X (перемените местами x и y) образуется т.н. псевдосфера.	
Циклоида	$x = R \cdot 2\pi t - d \cdot Sin(2\pi t)$; $y = R - d \cdot Cos(2\pi t)$; $(X_{min} + d)/2\pi R < t < (X_{max} - d)/2\pi R$		
Эпитрохоида и ее производные	$x = (R+r) \cdot Cos(2\pi t) - h \cdot Cos2\pi(k+1)t$ $y = (R+r) \cdot Sin(2\pi t) - h \cdot Sin2\pi(k+1)t$, $k = R/r$	$h=r$ - эпициклоида, $R=r$ - улитка Паскаля. $h=R+r$ - трохоидальная роза	Предельные значения t подбираются так, чтобы их разность была кратна n, где
Эпициклоида и ее производные	$x = (R+r) \cdot Cos(2\pi t) - r \cdot Cos2\pi(k+1)t$ $y = (R+r) \cdot Sin(2\pi t) - r \cdot Sin2\pi(k+1)t$, $k = R/r$	$k=1$ - кардиоида, при целых k k непересекающихся ветвей	
Гипотрохоида и ее производные	$x = (R-r) \cdot Cos(2\pi t) + h \cdot Cos2\pi(k-1)t$ $y = (R-r) \cdot Sin(2\pi t) - h \cdot Sin2\pi(k-1)t$, $k = R/r$	$h=r$ - гипоциклоида. $R=2r$ - эллипс	
Гипоциклоида и ее производные	$x = (R-r) \cdot Cos(2\pi t) + r \cdot Cos2\pi(k-1)t$ $y = (R-r) \cdot Sin(2\pi t) - r \cdot Sin2\pi(k-1)t$, $k = R/r$	$k=2$ - отрезок прямой; $k=3$ - кривая Штейнера; $k=4$ - астроида; k целое - кривая из m ветвей	
Спираль Архимеда	$x = t \cdot Cos(t)$, $y = t \cdot Sin(t)$, $t \in [0, \infty)$.		
Инволюта	$x = Cos\,t + t\,Sin\,t$, $y = Sin\,t - t \cdot Cos\,t$, $t \in [0, \infty)$	Эвольвента спирали Архимеда	
Гиперболическая	$x = Cos(t)/t$, $y = Sin(t)/t$, $t \in [0, \infty)$		

спираль		
Квадратичная спираль	$x = t^2\ Cos\ (t)\ ,\ \ y = t^2\ Sin\ (t),\quad t \in [0\ ,\ \infty)$	
Логарифмическая спираль	$x = A^t Cos(t)\ ,\ y = A^t Sin(t)\ ,\ t \in [0\ ,\ \infty).$	при $A<1$ - по часовой стрелке и при $A>1$ - против.
Спираль Галилея	$x = (A\ t^2 - L)\ Cos\ (t)\ ,\ \ y = (A\ t^2 - L)\ Sin\ (t),\ t \in [0\ ,\ \infty).$	
Спираль Ферма	$x = \pm\sqrt{t} \cdot Cos(t)\ ,\ y = \pm\sqrt{t} \cdot Sin(t)\ ,\ t \in [0\ ,\ \infty).$	
Спираль Корню	$x = \int_0^{\pm t} \frac{\cos(s^2)}{2a} ds\ ,\ y = \int_0^{\pm t} \frac{\sin(s^2)}{2a} ds\ ,\ t \in [0\ ,\ \infty).$	клотоида, клофоида, спираль Эйлера
SiCi - спираль	$x = \int_{\infty}^{t} \frac{\cos(z)}{z} dz\ ,\ y = si(t) = \int_{\infty}^{t} \frac{\sin(z)}{z} dz\ ,t>>0$	закручивается против часовой стрелки к центру
Жезл	$x = \pm\frac{Cos(t)}{\sqrt{t}}\ ,\ y = \pm\frac{Sin(t)}{\sqrt{t}}\ ,\ t \in [0\ ,\ \infty).$	
Овалы Кассини	$X = R\ Cos(2\pi t)\ ,\ Y = R\ Sin(2\pi t)\ ,\ t \in [-1/4\ ,\ 1/4\ ]$ R - корень уравнения $R^4 - 2c^2\ R^2\ Cos(4\pi t) = A^4 - c^4$	При $A > C\sqrt{2}$ - овал, $C < A < C\sqrt{2}$ - линия с талией, $A < C$ - **два овала**, $A = C$ - лемниската Бернулли

По соображениям возможности расширения списка кривых, единообразия процедур их рисования и исключительно удобного интерфейса для компьютерной реализации выбрана среда Matlab, в современных версиях которой возможно использование полноценного объектно-ориентированного подхода к написанию программ. Имеется возможность создавать описывать классы, свойства, методы, задавать членам классов атрибуты, реализовывать наследование и прочие. Каждая кривая представляет собой объект, инкапсулирующий в себе проверку полей данных и введенных параметров, реализующий метод вычисления значений функции, и являющийся наследником от

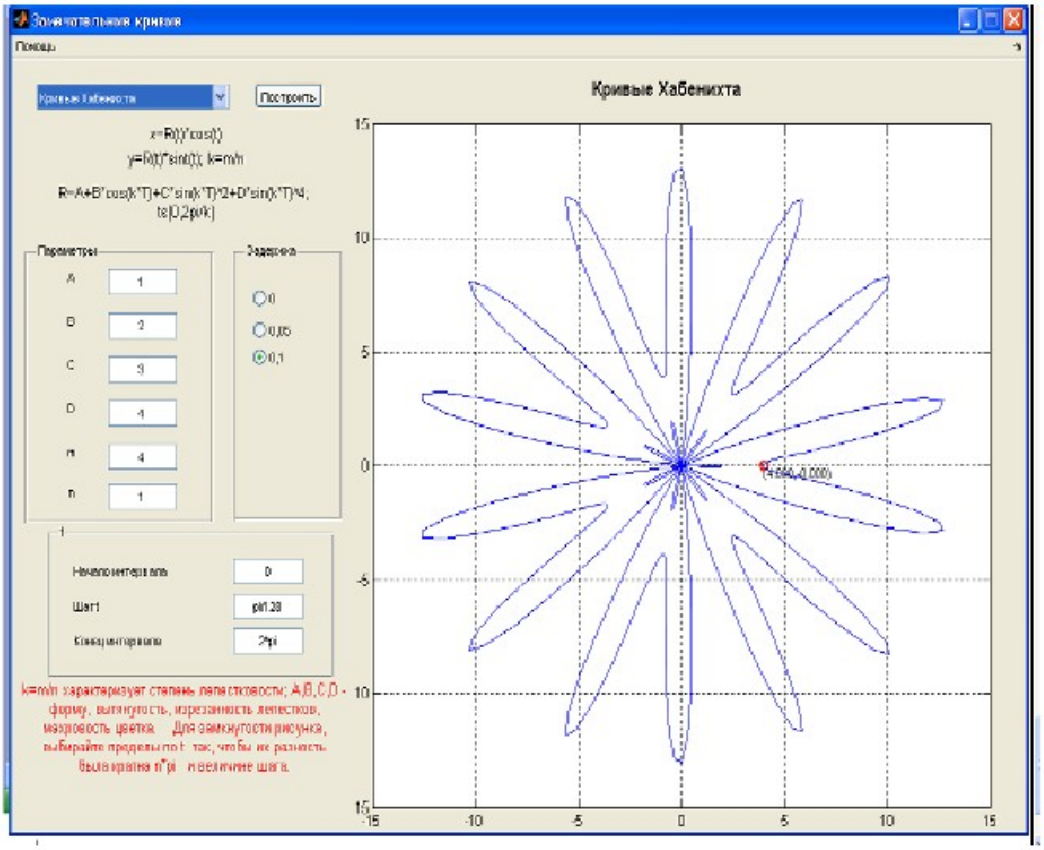

Рис.2. Интерфейс программы

базового класса «Curv», который, в свою очередь, содержит объявление обязательных полей и некоторые служебные методы, необходимые всем производным классам.

Для запуска программы достаточно копировать программные файлы предлагаемой папки в папку, созданную по адресу C:\ Documents and Settings, войти в среду Matlab и открыть в списке файлов этой папке файл FormMain.m. В открывшемся окне редактора нажать кнопку Run или клавишу F5.

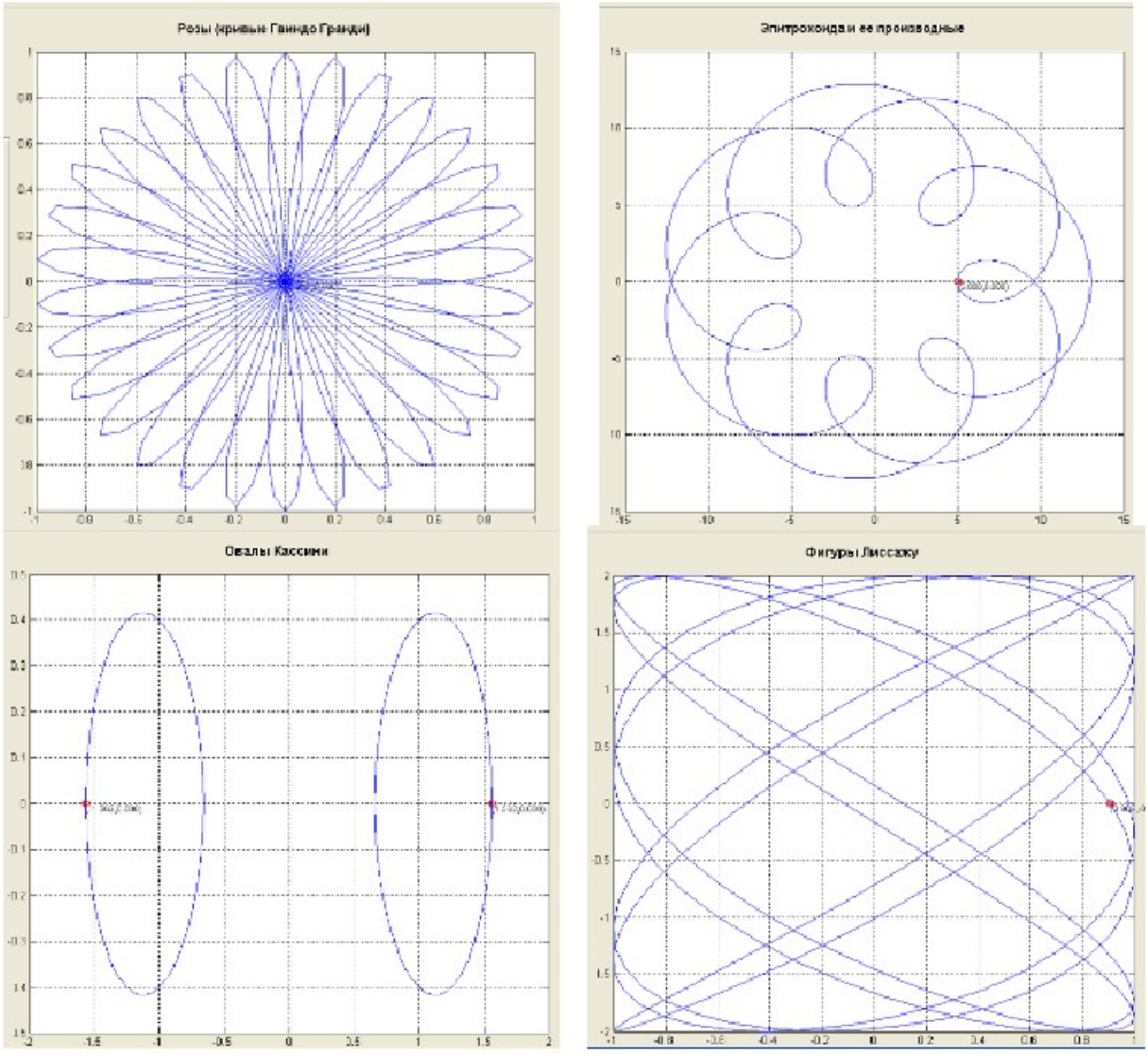

Рис.3. Образцы вывода

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. http://www.mathworks.com/help/techdoc/matlab_oop/ug_intropage.html

2. *С. А. Веревкин, М.А. Волков, Д. Д.Шинкарева.* Замечательные математические кривые (унифицированный подход к отображению и хранению) //Вестник КузГТУ, 2003, №4. С.78-81.

3. Виноградов И.М. (ред.) Математическая энциклопедия. В 5 томах . - М.: Советская энциклопедия, 1977 -1985

Авторы статьи:

Тынкевич
Моисей Аронович,
канд.физ.-мат. наук, проф.каф. прикладных информационных технологий КузГТУ. Email: tma_vt@kuzstu.ru

Несмелов
Дмитрий Евгеньевич ,
студент гр.ПИ-091КузГТУ.
Email: ryuk13@yandex.ru