

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

**УДК 519.6:004**

**М.А. Тынкевич, Д.Е. Несмелов**

### ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ (ИНТЕРАКТИВНАЯ ГРАФИКА В СРЕДЕ MATLAB)

Знакомство с миром т. н. замечательных математических кривых, возникших в свое время из потребностей механики и астрономии, является, конечно, лишь крошечным элементом математической культуры – существенного элемента общей культуры человека, интеллектуально мыслящего и способного ориентироваться в усложняющемся информационном мире. В этом мире, рядом с общезвестными (!?) окружностью или эллипсом, соседствуют спирали Архимеда, Галилея, Ферма и Корню, улитка Паскаля, лемниската Бернулли, декартов лист и другие геометрические конструкции, названные по имени их создателей или в знак благодарности потомков знаменитым ученым прошлого.

Знакомство с этим миром полезно не только историкам математики или преподавателям теоретической механики, но и преподавателю точных наук для стимуляции любопытства ученика или воспитания у него чувства прекрасного (на рис.1 приведены необычные орнаменты, получающиеся сочетанием математического знания и искусства программирования). Услышав название «конхонда Никомеда» и увидев ее, современный, не лишенный любопытства школьник, конечно, обратится в Интернет и, между делом, узнает о существовании Древней Греции и о том, как трудно разделить угол на три равные части или «откуда есть и пошли точные, естественные и сверхестественные науки»

Целенаправленный поиск в Интернете обнаруживает множество текстовой и графической информации об искомой конкретной функции, в том числе демонстрационных примеров, выполненных с исключительным изяществом.

Тем не менее представляет интерес программная реализация, обеспечивающая возможность построения любой из фиксированного, но достаточно широкого множества кривых и ее дочерних, нестандартных конструкций.

Так в 2003 г. студентами КузГТУ Волковым С.А., Веревкиным М.А. и Шинкаревой Д.Д. [2] под руководством автора была построена соответствующая программа, использующая унифицированный подход к представлению данных. При таком подходе любая кривая может быть отображена без написания дополнительного программного кода хранением информации о кривых в формате XML

В основу нашей программной реализации положено представление кривых в параметрическом задании  $x=R(P, t) \cos \mu t$ ,  $y=R(P, t) \sin \mu t$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ , где  $P$  – совокупность параметров кривой. Исключение из общего правила составляют только овалы Кассини в варианте их распада на отдельные фрагменты, где удобнее использование представления в декартовых координатах.

Состав семейства программных реализаций

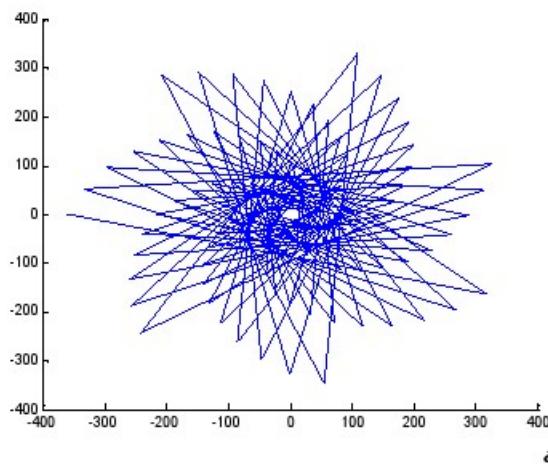
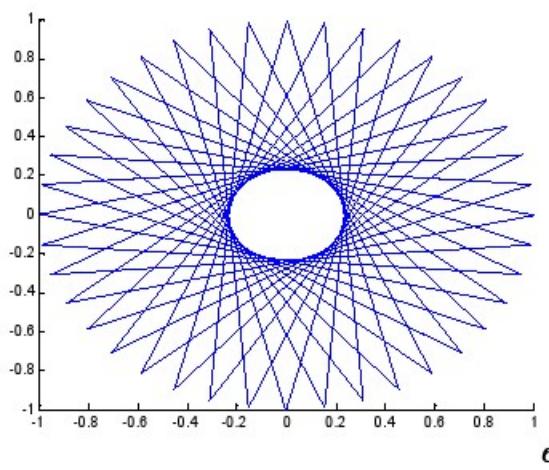


Рис. 1. а) Спираль  $x = t \cos(t)$ ;  $y = \varphi \sin(t)$ ;  $t = 0 : 1.15 : 115, 1$ ;  
б) Окружность  $x = \cos t$ ;  $y = \sin t$ ;  $t = (0: 1.15: 230, 1)$



(см. таблицу), как нам кажется, достаточно широк и за его пределами остались лишь немногие из упоминаемых в математической литературе [3].

Программа реализует демонстрацию построения графиков кривых в интерактивном режиме. Пользователь имеет возможность выбрать конкретную кривую, согласиться с задаваемыми по умолчанию параметрами кривой или экспериментировать с различными их сочетаниями (в частно-

сти, математические выражения для начала, конца и шага по интервалу значений  $t$ , например  $\pi/32$ ). Более того, построение графического объекта здесь происходит в динамике – не конечный результат, а появление рисунка с выбранным уровнем замедления (3 уровня), что способствует уяснению самого процесса построения объекта. Любая из упомянутых корректур выполнима на любом этапе рисования.

### Состав пакета замечательных математических кривых

|                               |   |  |
|-------------------------------|---|--|
| Окружность и ее производные   | $x = R \cos 2\pi t, y = R \sin 2\pi t, t \in [0, 1]$  | При шаге $h_t \neq 1/k$ , где $k$ – целое, звездоподобные фигуры, многоугольники и орнаменты, вписанные в кривую |
| Эллипс и его производные      | $x = a \cos 2\pi t, y = b \sin 2\pi t, t \in [0, 1]$  |  |
| Астроида и ее производные     | $x = R \cos^3(2\pi t/4), y = R \sin^3(2\pi t/4), t \in [0, 0.4]$  | То же при шаге $h_t \neq 4/k$  |
| Розы (кривые Гвидо Гранди)    | $x = R \sin(2\pi kt) \cos 2\pi t, y = R \sin(2\pi kt) \sin 2\pi t$  | При нечетном $k=m/n$ $k$ лепестков, при четном – $2k$ .  |
| Кривые Хабенихта              | $x = R \cdot \cos 2\pi t, y = R \cdot \sin 2\pi t,$<br>$R = A + B \cdot \cos(2\pi kt) + C \cdot \sin^2(2\pi kt) + D \cdot \sin^4(2\pi kt)$        | $k$ – лепестковость; $A, B, C, D$ – форма, вытянутость и изрезанность лепестков, махровость цветка.              |
| Улитка Паскаля                | $x = (R \cdot \cos 2\pi t + L) \cos 2\pi t$<br>$y = (R \cdot \cos 2\pi t + L) \sin 2\pi t, t \in [0, 1], L > 0$                                   |  |
| Конхоида Никомеда             | $x = (A / \cos 2\pi t \pm L) \cos 2\pi t$<br>$y = (A / \cos 2\pi t \pm L) \sin 2\pi t, -0.25 < t < 0.25$  |  |
| Декартов лист                 | $x = R \cdot \cos 2\pi t; y = R \cdot \sin 2\pi t,$<br>$R = 3A/2 \cdot \sin(4\pi t) / (\cos^3(2\pi t) + \sin^3(2\pi t)),$<br>$-0.125 < t < 0.375$ |  |
| Декартов овал                 | $x = R \cdot \cos 2\pi t; y = R \cdot \sin 2\pi t,$<br>$R$ – корень уравнения<br>$(M^2 - 1)R^2 - 2R(M^2 d \cos 2\pi t - A) + (Md)^2 - A^2 = 0$    | $M \neq 1$ – два овала; $M=1, A>D$ – эллипс; $M=-1, A < D$ – гипербола; $M=A/d$ – улитка Паскаля.                |
| Лемниската Бернуlli           | $x = \pm R \cdot \cos 2\pi t; y = R \cdot \sin 2\pi t,$<br>$R = A \sqrt{2 \cos(4\pi t) }, -0.125 < t < 0.125$                                     |  |
| Трактиса                      | $x = \pm \left[ A \cdot \ln \frac{A - \sqrt{A^2 - t^2}}{ t } + \sqrt{A^2 - t^2} \right], y = t, 0 < t < A$  | При вращении вокруг оси X (перемените местами $x$ и $y$ ) образуется т.н. псевдосфера.                           |
| Циклоида                      | $x = R \cdot 2\pi t - d \cdot \sin(2\pi t); y = R - d \cdot \cos(2\pi t);$<br>$(X_{min} + d) / 2\pi R < t < (X_{max} - d) / 2\pi R$               |  |
| Эпитрохоида и ее производные  | $x = (R+r) \cdot \cos(2\pi t) - h \cdot \cos 2\pi(k+1)t$<br>$y = (R+r) \cdot \sin(2\pi t) - h \cdot \sin 2\pi(k+1)t, k = R/r$                     | $h=r$ – эпициклоида, $R=r$ – улитка Паскаля. $h=R+r$ – трохоидальная роза  |
| Эпициклоида и ее производные  | $x = (R+r) \cdot \cos(2\pi t) - r \cdot \cos 2\pi(k+1)t$<br>$y = (R+r) \cdot \sin(2\pi t) - r \cdot \sin 2\pi(k+1)t, k = R/r$                     | $k=1$ – кардиоида, при целых $k$ $k$ непересекающихся ветвей   |
| Гипотрохоида и ее производные | $x = (R-r) \cdot \cos(2\pi t) + h \cdot \cos 2\pi(k-1)t$<br>$y = (R-r) \cdot \sin(2\pi t) - h \cdot \sin 2\pi(k-1)t, k = R/r$                     | $h=r$ – гипоциклоида.<br>$R=2r$ – эллипс   |
| Гипоциклоида и ее производные | $x = (R-r) \cdot \cos(2\pi t) + r \cdot \cos 2\pi(k-1)t$<br>$y = (R-r) \cdot \sin(2\pi t) - r \cdot \sin 2\pi(k-1)t, k = R/r$                     | $k=2$ – отрезок прямой; $k=3$ – кривая Штейнера; $k=4$ – астроида; $k$ целое – кривая из $m$ ветвей              |
| Сpirаль Архимеда              | $x = t \cdot \cos(t), y = t \cdot \sin(t), t \in [0, \infty)$   | Предельные значения $t$ подбираются так, чтобы их разность была кратна $n$ , где                                 |
| Инволюта                      | $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t, t \in [0, \infty)$   |  |
| Гиперболическая               | $x = \cos(t)/t, y = \sin(t)/t, t \in [0, \infty)$   | Эвольвента спирали Архимеда  |

|                         |  |  |
|-------------------------|--|--|
| спираль                 |  |  |
| Квадратичная спираль    | $x = t^2 \cos(t), y = t^2 \sin(t), t \in [0, \infty)$  |  |
| Логарифмическая спираль | $x = A^t \cos(t), y = A^t \sin(t), t \in [0, \infty)$ .  | при $A < 1$ - по часовой стрелке и при $A > 1$ - против.   |
| Сpirаль Галилея         | $x = (A t^2 - L) \cos(t), y = (A t^2 - L) \sin(t), t \in [0, \infty)$ .  |  |
| Сpirаль Ферма           | $x = \pm \sqrt{t} \cdot \cos(t), y = \pm \sqrt{t} \cdot \sin(t), t \in [0, \infty)$ .  |  |
| Сpirаль Корню           | $x = \int_0^t \frac{\cos(s^2)}{2s} ds, y = \int_0^t \frac{\sin(s^2)}{2s} ds, t \in [0, \infty)$ .                                | клоноида, клофоида, спираль Эйлера   |
| SiCi - спираль          | $x = \int_{-\infty}^t \frac{\cos(z)}{z} dz, y = si(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin(z)}{z} dz, t > 0$                            | закручивается против часовой стрелки к центру  |
| Жезл                    | $x = \pm \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}, y = \pm \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}, t \in [0, \infty)$ .  |  |
| Овалы Кассини           | $X = R \cos(2\pi t), Y = R \sin(2\pi t), t \in [-1/4, 1/4]$<br>R - корень уравнения<br>$R^4 - 2c^2 R^2 \cos(4\pi t) = A^4 - c^4$ | При $A > C\sqrt{2}$ - овал, $C < A < C\sqrt{2}$ - линия с талией, $A < C$ - два овала, $A = C$ - лемниската Бернулли |

По соображениям возможности расширения списка кривых, единство процедуры их рисования и исключительно удобного интерфейса для компьютерной реализации выбрана среда Matlab, в современных версиях которой возможно использование полноценного объектно-ориентированного подхода к написанию программ. Имеется

возможность создавать описывать классы, свойства, методы, задавать членам классов атрибуты, реализовывать наследование и прочие. Каждая кривая представляет собой объект, инкапсулирующий в себе проверку полей данных и введенных параметров, реализующий метод вычисления значений функции, и являющийся наследником от

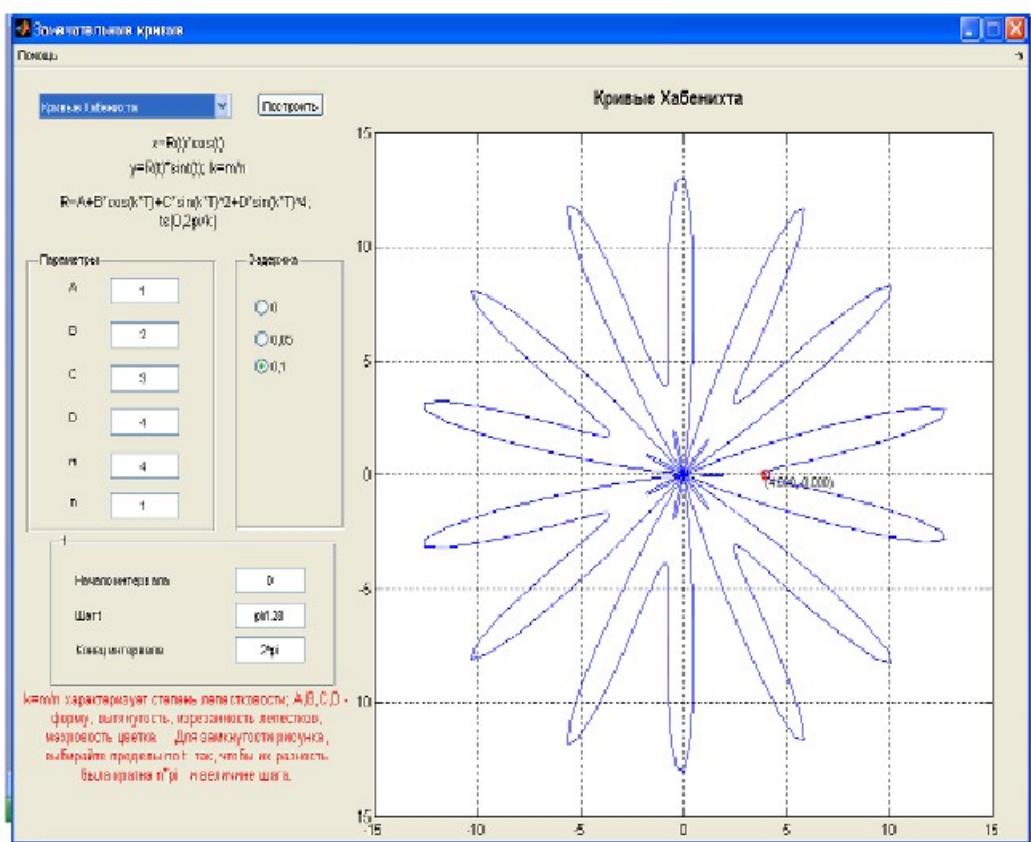


Рис.2. Интерфейс программы

базового класса «Curve», который, в свою очередь, содержит объявление обязательных полей и некоторые служебные методы, необходимые всем производным классам.

Для запуска программы достаточно копировать программные файлы предлагаемой папки в

папку, созданную по адресу C:\ Documents and Settings, войти в среду Matlab и открыть в списке файлов этой папке файл FormMain.m. В открывшемся окне редактора нажать кнопку Run или клавишу F5.

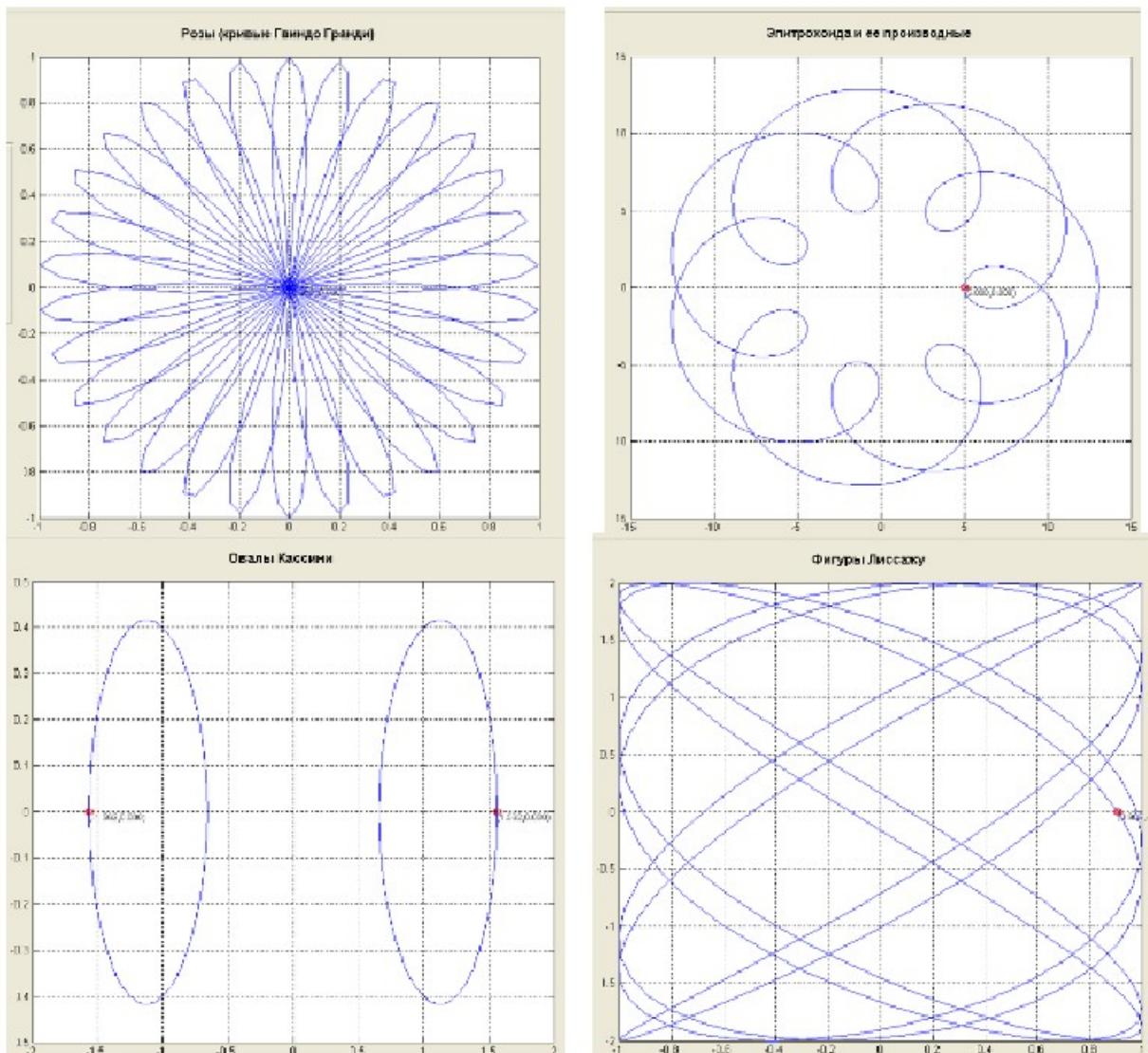


Рис.3. Образцы вывода

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. [http://www.mathworks.com/help/techdoc/matlab\\_oop/ug\\_intropage.html](http://www.mathworks.com/help/techdoc/matlab_oop/ug_intropage.html)
2. С. А. Веревкин, М.А. Волков, Д. Д.Шинкарева. Замечательные математические кривые (унифицированный подход к отображению и хранению) //Вестник КузГТУ, 2003, №4. С.78-81.
3. Виноградов И.М. (ред.) Математическая энциклопедия. В 5 томах . - М.: Советская энциклопедия, 1977 -1985

□ Авторы статьи:

Тынкевич  
Моисей Аронович,  
канд физ.-мат. наук, проф каф. при-  
кладных информационных техноло-  
гий КузГТУ. Email: tma\_vt@kuzstu.ru

Несмелов  
Дмитрий Евгеньевич,  
студент гр.ПИ-091 КузГТУ.  
Email: ryuk13@yandex.ru