ГЕОМЕХАНИКА

УДК 622.241.54:539.3

Н.В. Черданцев

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ СЛОЯ КРОВЛИ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ ПОСЛЕ ЕГО ОТДЕЛЕНИЯ ОТ ОСНОВНОГО МАССИВА

Известно, что массив осадочных горных пород обладает ярко выраженной анизотропией прочностных свойств, обусловленной наличием поверхностей ослабления, по которым характеристики прочности ниже, чем по расположенной между этими поверхностями породе. В массиве осадочных горных пород поверхностями ослабления, в основном, являются слоистость и кливаж (рис. 1 *а*). Очевидно, что его разрушение, в первую очередь, происходит по поверхностям ослабления, вследствие чего за контуром выработок образуются зоны нарушения сплошности (ЗНС) [1, 2], в которых массив не монолитен, а расслоён. По размерам и конфигурации этих зон можно судить о степени его расслоения около выработки. Деформирование слоёв в зонах нарушения сплошности приводит к их разрушению и как, следствие, к вывалам горной породы из кровли и бортов выработки или к пучению её почвы.

Задача по определению областей разрушения массива с поверхностями ослабления в окрестности выработки, его влияния на крепь может быть решена в два этапа.

На первом этапе необходимо решить задачу механики сплошной среды, в ходе решения которой необходимо определить поле напряжений во вмещающем выработку массиве. Полагая, что физические свойства пород, слагающих массив, незначительно отличаются друг от друга то в расчётах поля напряжений можно пренебречь физической неоднородностью и анизотропией свойств массива. Принимая допущение о том, что массив, до ведения горных работ является, как правило, упругой средой [3, 4], можно решать не общую задачу механики сплошных сред, а более простую - задачу теории упругости. Если учесть, что массив разрушается по поверхностям ослабления, находясь в упругом состоянии, то применение других разделов механики сплошных сред, например, теории пластичности, механики предельного состояния не имеет смысла, поскольку, разрушаясь по поверхностям ослабления, он перестаёт быть сплошным. Найденное поле напряжений вполне позволяет для оценки прочности массива по поверхностям ослабления применять теорию прочности Мора – Кузнецова и строить зоны нарушения сплошности по совокупности точек, в которых произошли разрушения согласно этой теории. Следует отметить, что для оценки прочности массива с регулярными поверхностями ослабления поле напряжений должно быть определено в каждой точке, т.е. быть непрерывным. Такое поле напряжений можно построить либо аналитическими методами, либо численно - методом граничных элементов. Другие численные методы (конечных элементов, конечных разностей) определяют дискретное поле. Область применения аналитических методов ограничена, в основном, плоскими задачами и небольшим числом форм поперечных сечений выработок. Поэтому метод граничных элементов является единственным методом построения поля напряжений в массиве

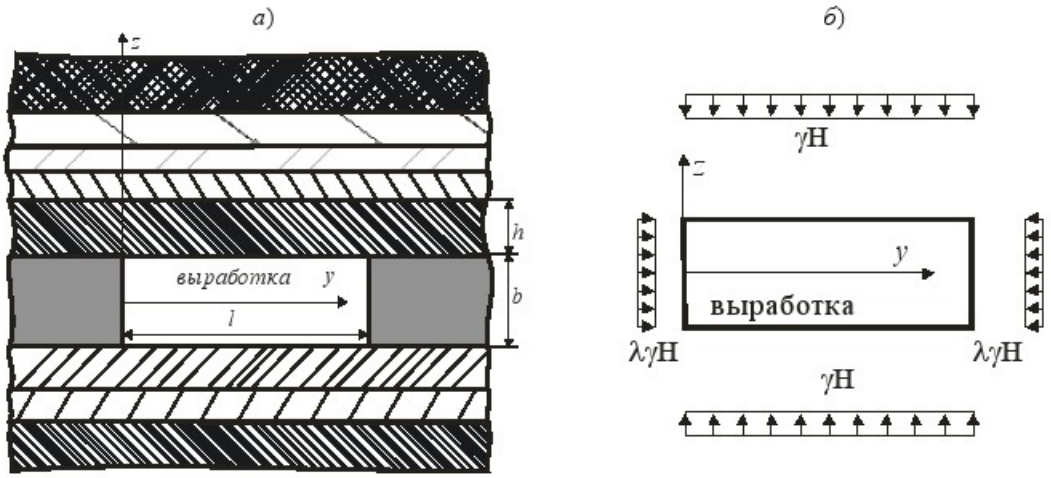

Рис. 1 – Расчётная схема массива с выработкой

горных пород, обладающих свойством прочностной анизотропии.

На втором этапе решается задача строительной механики стержневых систем. Принимается, что в зоне нарушения сплошности массив расслоен и представляет собой набор стержней, защемлённых по концам, нагруженных силами собственного веса и сдвигающей распределённой по их поверхности нагрузкой.

На первом этапе решения задачи расчётной схемой массива, вмещающего выработку, является бесконечная упругая среда, нагруженная в окрестности выработки литологическими силами налегающей сверху толщи горных пород γH (γ – плотность пород, H – глубина заложения выработки) (рис. 1 *б*).

На втором этапе, располагая результатами решения первого этапа, в котором получено поле напряжений во вмещающем массиве, устанавливается область его расслоения. Допустим, что прослойка между слоем, расположенным в кровле выработки, и следующим за ним полностью разрушена.

Рассмотрим силы, действующие на него (рис. 2 *а*). Поскольку для протяжённой выработки породы вокруг неё находятся в условиях плоского деформированного состояния, то расчёт слоя сводится к расчёту балки-полоски длиной l, равной пролёту выработки и шириной (в направлении оси x), равной единице. Интенсивность распределённой поперечной нагрузки q, действующей на балку-полоску, определяется произведением объёмного веса γ на мощность (толщину) слоя h (рис. 2 *а*, *б*). Сдвигающая нагрузка t, действующая на балку-полоску, равна произведению касательных напряжений по контакту слоя $\Delta\tau$ на ширину балки, т.е. на 1 (рис. 2 *в*). Величина $\Delta\tau$ равна разности между касательными напряжениями, найденными из решения задачи теории упругости (на первом этапе) и предельными касательными напряжениями согласно критерию разрушения Мора – Кузнецова. В расчётах балки на прочность и жёсткость вся действующая на неё нагрузка приводится к её оси. Выполняя эту процедуру, получим следующие типы нагрузок, действующие вдоль оси балки: распределённые по длине балки сдвигающую силу t и моментную нагрузку $m=th/2$.

Поскольку балка защемлена с обеих сторон, то она является трижды статически неопределимой системой и её расчёт от указанных типов нагрузок эффективнее всего проводить методом сил. На основе принципа суперпозиции расчёт балки производится раздельно. Сначала выполняется её расчёт от действия поперечной нагрузки. После этого можно производить расчёт на действие сдвигающей нагрузки. Последовательность расчёта на ту или иную нагрузку не играет роли.

Расчёт жёстко защемлённой с обеих сторон балки от действия равномерно распределённой поперечной нагрузки (рис. 2 *д*) приведён в многочисленной учебной и справочной литературе по строительной механике, например, в [5]. В этой статье показана эпюра моментов (рис. 2 *е*), по которой и оценивается прочность балки от действия поперечной нагрузки.

Последовательность же расчёта жёстко защемлённой с двух сторон балки, являющейся также трижды статически неопределимой системой, от действия продольных сил t и моментной нагрузки m (рис. 3 *а*) методом сил приводится ниже достаточно подробно. Сначала выбирается основная система. Заданная балка освобождается от «лишних» связей, например, отбрасывания правой заделки. После этого она становится статически определимой геометрически неизменяемой системой (рис. 3 *б*). Затем строится эквивалентная система путём загружения основной системы внешней нагрузкой t, m и неизвестными усилиями в отброшенных связях X_1, X_2, X_3. Составляются канонические уравнения метода сил

$$\delta_{ij} X_j = -\Delta_{ip}, \qquad (1)$$

где δ_{ij} – единичное перемещение в направлении i - ой отброшенной связи, вызванное действием j – ой единичной силы $X_j=1$, Δ_{ip} - перемещение в на-

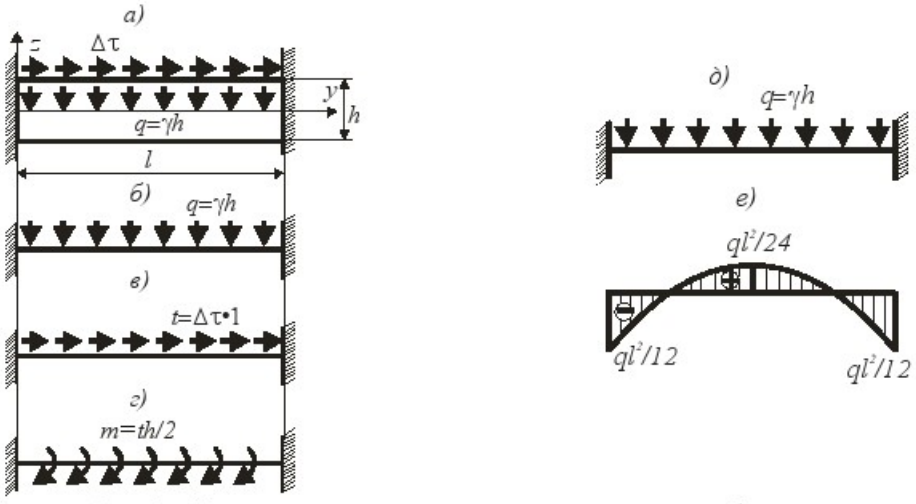

Рис. 2 – К расчёту слоя, расположенного в кровле выработки

правлении i - ой отброшенной связи, вызванное действием внешней заданной нагрузки. В развёрнутом виде уравнения (2) принимают вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_{13}=-\Delta_{1p}, \\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_{13}=-\Delta_{2p}, \\ \delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_{13}=-\Delta_{3p}, \end{cases} \quad (2)$$

где, например, δ_{11} – единичное перемещение от $X_1=1$ в направлении X_1, δ_{23} - единичное перемещение в направлении X_2 от силы $X_3=1$, Δ_{1p} - перемещение в направлении X_1, вызванное действием внешней заданной нагрузки. Согласно теореме о взаимности перемещений $\delta_{12}=\delta_{21}$, $\delta_{23}=\delta_{32}$, $\delta_{13}=\delta_{31}$.

Запишем формулы, по которым определяются коэффициенты и свободные члены в системе (2)

$$\delta_{11}=\int_0^l \frac{N_1\cdot N_1}{E\cdot F}dy\,,\ \delta_{22}=\int_0^l \frac{M_2\cdot M_2}{E\cdot J}dy\,,$$

$$\delta_{33}=\int_0^l \frac{M_3\cdot M_3}{E\cdot J}dy\,,\quad \delta_{23}=\int_0^l \frac{M_1\cdot M_2}{E\cdot F}dy\,,$$

$$\Delta_{1p}=\int_0^l \frac{N_p\cdot N_1}{E\cdot F}dy\,,\ \Delta_{2p}=\int_0^l \frac{M_p\cdot M_2}{E\cdot J}dy\,,$$

$$\Delta_{3p}=\int_0^l \frac{M_p\cdot M_3}{E\cdot J}dy\,, \quad (3)$$

где E – модуль упругости материала слоя, $F=h1$ – площадь поперечного сечения балки-полоски. $J=1\ h^3/12$ – момент инерции поперечного сечения балки-полоски относительно её горизонтальной центральной оси.

Поскольку ось балки при изгибе согласно технической теории балок не изменяет длины, то $\delta_{12}=0$, $\delta_{13}=0$. В этой связи (2) распадается на две системы. В первой системе одно уравнение, во второй - два. В этих выражениях приняты следующие обозначения. N_p – продольная сила в произвольном сечении основной системы от действия сил t (рис. 3 *г*). M_p – изгибающий момент в произвольном сечении основной системы от действия распределённой моментной нагрузки m (рис. 3 *г*). N_1 – продольная сила в произвольной сечении основной системы от действия $X_1=1$ (рис. 3 *д*). M_2 – изгибающий момент в произвольной сечении основной системы от действия $X_2=1$ (рис. 3 *е*). M_3 – изгибающий момент в произвольной сечении основной системы от действия $X_3=1$ (рис. 3 *ж*).

Пользуясь фрагментами рис. 3, запишем уравнения для перечисленных выше параметров.

$$N_p=\int_y^l t dy\,,\quad M_p=-\frac{h}{2}\int_y^l t dy\,,$$

$$N_1=1\,,\quad M_2=1\,,\quad M_3=l-y\,. \quad (4)$$

Подставляя выражения (4) в (3), получим

$$\delta_{11}=\int_0^l \frac{1\cdot 1}{E\cdot F}dy=\frac{l}{E\cdot h}\,,\ \delta_{22}=\int_0^l \frac{1\cdot 1}{E\cdot J}dy=\frac{12l}{E\cdot h^3}\,,$$

$$\delta_{33}=\int_0^l \frac{(l-y)\cdot(l-y)}{E\cdot J}dy=\frac{12l^3}{E\cdot h^3}$$

$$\delta_{23}=\int_0^l \frac{1\cdot 1}{E\cdot F}dy=\frac{l}{E\cdot h}\,,\Delta_{1p}=\frac{1}{E\cdot h}\int_0^l\left(\int_y^l t dy\right)dy\,,$$

$$\Delta_{2p}=-\frac{6}{E\cdot h^2}\int_0^l\left(\int_y^l t dy\right)dy\,,$$

$$\Delta_{3p}=-\frac{6}{E\cdot h^2}\int_0^l (l-y)\left(\int_y^l t dy\right)dy\,. \quad (5)$$

Преобразуем интеграл с переменным верхним пределом , входящий в (4), представив его комбинацией двух интегралов, один из которых с постоянным верхним пределом, а у другого интеграла верхний предел переменный. Из [6] следует очевидное соотношение

$$I=\int_x^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx-\int_0^x f(x)dx\,. \quad (6)$$

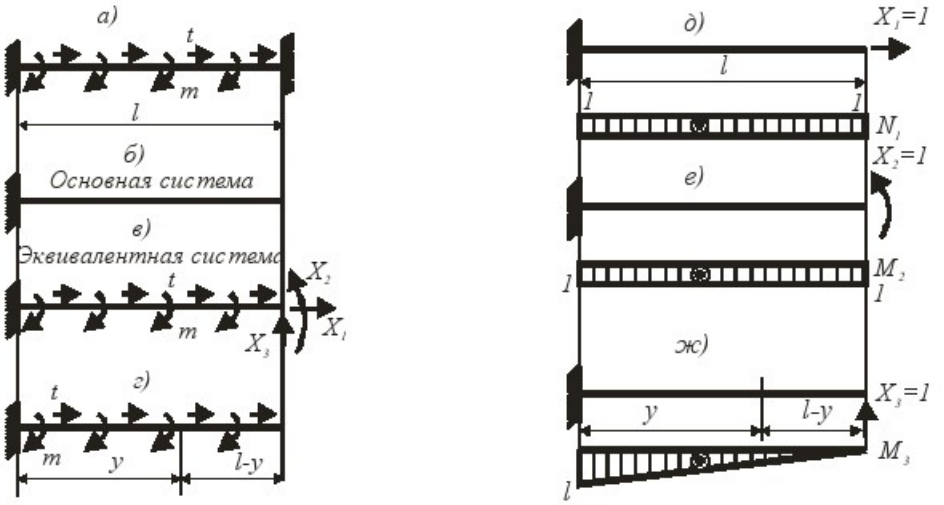

Рис. 3 – К расчёту слоя от действия сдвигающей нагрузки

На основании (6) интегралы, входящие в (4) и (5), примут вид

$$N_p = \int_y^l t dy = \int_0^l t dy - \int_0^y t dy ,$$

$$M_p = -\frac{h}{2}\int_y^l t dy = -\frac{h}{2}\left(\int_0^l t dy - \int_0^y t dy\right), \quad (7)$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{Eh}\int_0^l\left(\int_y^l t dy\right)dy = \frac{1}{Eh}\int_0^l\left(\int_0^l t dy - \int_0^y t dy\right)dy =$$

$$= \frac{1}{Eh}\left(\int_0^l\left(\int_0^l t dy\right)dy - \int_0^l\left(\int_0^y t dy\right)dy\right)$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{6}{Eh^3}\int_0^l\left(\int_y^l t dy\right)dy =$$

$$= -\frac{6}{Eh^2}\int_0^l\left(\int_0^l t dy - \int_0^y t dy\right)dy = , \quad (8)$$

$$= -\frac{6}{E\cdot h^2}\left(\int_0^l\left(\int_0^l t dy\right)dy - \int_0^l\left(\int_0^y t dy\right)dy\right)$$

$$\Delta_{3p} = -\frac{6}{E\cdot h^2}\int_0^l (l-y)\left(\int_y^l t dy\right)dy =$$

$$= -\frac{6l}{E\cdot h^2}\left(\int_0^l\left(\int_0^l t dy\right)dy - \int_0^l\left(\int_0^y t dy\right)dy\right) +$$

$$+ \frac{6}{E\cdot h^2}\left(\int_0^l y\left(\int_0^l t dy\right)dy - \int_0^l y\left(\int_0^y t dy\right)dy\right).$$

В (8) входят следующие типы интегралов

$$I_1 = \int_0^l\left(\int_0^l t dy\right)dy , \quad I_2 = \int_0^l\left(\int_0^y t dy\right)dy ,$$

$$I_3 = \int_0^l y\left(\int_0^l t dy\right)dy , \; I_4 = \int_0^l y\left(\int_0^y t dy\right)dy ., \quad (9)$$

которые берутся, отыскиваются численно

$$I_1 = (\Delta y)^2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n t_j , \quad I_2 = (\Delta y)^2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^i t_j , \quad (9)$$

$$I_3 = (\Delta y)^2\sum_{i=1}^n y_i\sum_{j=1}^n t_j , I_3 = (\Delta y)^2\sum_{i=1}^n y_i\sum_{j=1}^i t_j ,$$

или путем аппроксимации величины t известной аналитической зависимостью. Поскольку для вычисления компонентов поля напряжений используется численный метод граничных элементов, то величина t имеет дискретный характер. В этой связи для вычисления интегралов предпочтительнее использовать формулы (9а), в которых Δy – интервал разбиения пролёта выработки (пролёта балки-полоски), n – число участков разбиения..

С учётом (9) выражения (8) примут вид

$$\Delta_{1p} = \frac{l}{Eh}(I_1 - I_2), \Delta_{2p} = -\frac{6}{Eh^2}(I_1 - I_2),$$

$$\Delta_{3p} = -\frac{6}{Eh^2}\left[l(I_1 - I_2) - I_3 + I_4\right]. \quad (10)$$

Подставим (5), (10) в систему (2), получим

$$\frac{l}{Eh}X_1 = -\frac{l}{Eh}(I_1 - I_2), \quad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что

$$X_1 = -\frac{(I_1 - I_2)}{l} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{12l}{Eh^3}X_2 + \frac{6l^2}{Eh^3}X_3 = \frac{6h}{Eh^3}(I_1 - I_2), \\ \frac{6l^2}{Eh^3}X_2 + \frac{4l^3}{Eh^3}X_3 = \frac{6h}{Eh^3}\left[l(I_1 - I_2) - I_3 + I_4\right]. \end{cases} \quad (13)$$

Введём обозначения

$$D_1 = \frac{h(I_1 - I_2)}{2}, D_2 = \frac{h}{2}\left[l(I_1 - I_2) - I_3 + I_4\right]. \quad (14)$$

С учётом (14) система (13) принимает вид

$$\begin{cases} 2lX_2 + l^2X_3 = 2D_1, \\ 3l^2X_2 + 2l^3X_3 = 6D_2. \end{cases} \quad (15)$$

откуда

$$X_2 = \frac{4lD_1 - 6D_2}{l^2}, \; X_3 = 6\frac{2D_2 - lD_1}{l^2} \quad (16)$$

В качестве примера оценим геомеханического состояния слоистого массива, вмещающего выработку прямоугольного сечения. Ограничимся исследованием состояния одного слоя массива, расположенного непосредственно в кровле выработки. Основные данные для вычисления и обозначения приняты следующими. Высота выработки *4 м*, пролёт выработки *6 м*, глубина её заложения $H=800$ *м*, средняя плотность налегающих пород $\gamma=25$ *kH/м*^{3}, коэффициент бокового давления $\lambda=0,7$, угол внутреннего трения $\varphi=20^0$. Массив представлен горизонтально расположенными слоями. Коэффициент крепости породы слоя непосредственной кровли f, её предел прочности на одноосное сжатие σ_c, ($\sigma_c=10f$, МПа), предел прочности породы на одноосевое растяжение в 10 раз меньше предела прочности на одноосное сжатие $\sigma_p=0,1\sigma_c$, коэффициент сцепления породы слоя K_0, связанный с σ_c и φ известной зависимостью $K_0=\sigma_c(1-\sin\varphi)/(2\cos\varphi)$, коэффициент сцепления по поверхности ослабления K принят $0,05\cdot K_0$.

Из расчёта первого этапа задачи получено, что по верхней поверхности слоя кровли произошли разрушения сдвигом, т.е. слой отделился от массива. На рис. 4 *а* представлена эпюра касательных напряжений, действующих по кромке слоя мощ-

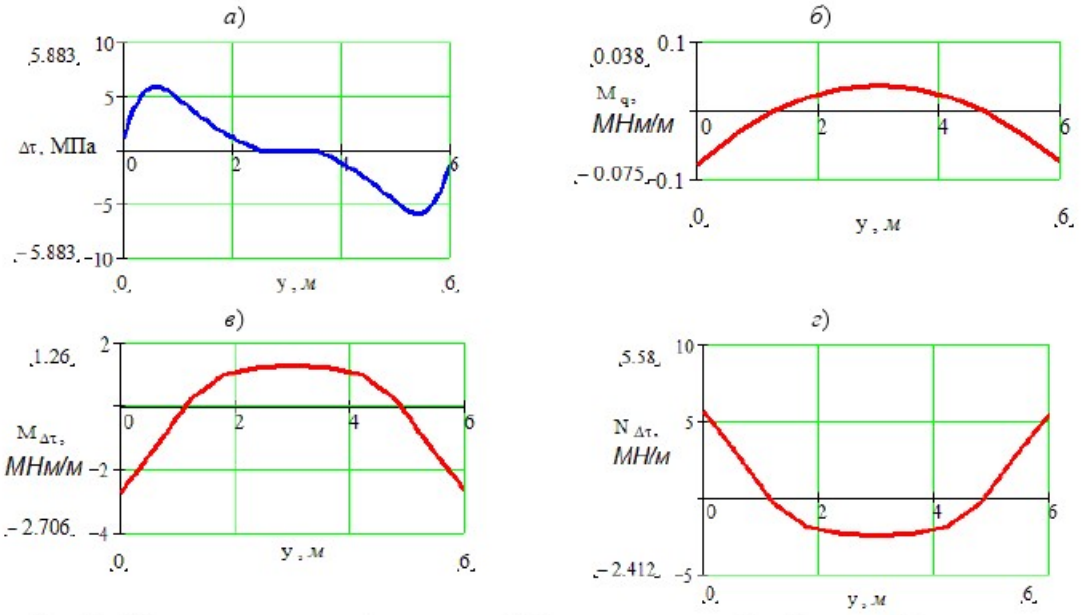

Рис. 4 – К результатам расчёта слоя от действия поперечной и сдвигающей нагрузок

ностью *1 м* после его отделения от основного массива. На рис. 4 *б*, *в* - эпюры изгибающих моментов, вызванных поперечной нагрузкой M_q (*в*) и сдвигающими силами $M_{\Delta\tau}$ (*г*). На 4*д* - эпюра продольных сил *N* от действия сдвигающих сил *t*.

Отметим, что изгибающие моменты, вызываемые действием сдвигающей нагрузки, более чем в 30 раз превышают напряжения от сил собственного веса.

Напряжения в крайних волокнах слоя вычисляются алгебраическим суммированием напряжений от каждого типа нагрузки. Опасными сечениями, очевидно, являются сечения в заделках, а также сечение посредине пролёта.

Напряжения в заделке и середине пролёта

$$\sigma_Z = \frac{M_Z}{W} + \frac{N_Z}{F}, \quad \sigma_C = \frac{M_C}{W} + \frac{N_C}{F}, \quad (17)$$

где M_Z, M_C – изгибающие моменты, соответственно, в заделке и в середине пролёта, W – осевой момент сопротивления балки-полоски, определяемый по формуле $W=h^2/6$. Подставляя в (17) данные с графиков рис. 4, получим, что максимальные напряжения в крайних волокнах заделки равны *22,268 МПа*, а в крайних волокнах середины пролёта *5,05 МПа*. Из этих графиков также следует, что верхние волокна в заделке и нижние волокна в середине пролёта растянуты. Отсюда следует, что одновременный разлом слоя в трёх местах (в заделке и середине) возможен при напряжениях не менее *5,05 МПа*, что соответствует коэффициенту крепости *f* не выше *5*, т.е. в достаточно прочной породе.

Таким образом, расчёт слоистого массива сводится к двухэтапному решению задачи о геомеханическом состоянии массива с поверхностями ослабления. На первом этапе решается задача теории упругости о напряжённом состоянии массива, вмещающего выработку, даётся оценка прочности массива на контактах слоёв. На втором этапе методами строительной механики и сопротивления материалов оценивается прочность самих слоёв.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ержанов Ж.С., Изаксон В.Ю., Станкус В.М.* Комбайновые выработки шахт Кузбасса. Опыт поддержания и расчет устойчивости – Кемерово: Кемеров. книжн. изд-во, 1976.–216 с.

2. *Черданцев Н.В., Изаксон В. Ю.* Некоторые трёхмерные и плоские задачи геомеханики. - Кемерово: КузГТУ, 2004.-190 с.

3. *Булычев Н.С.* Механика подземных сооружений. –М.: Недра, 1994.–382 с.

4. *Петухов И.М., Линьков А.М., Сидоров В.С., Фельдман Н.А.* Теория защитных пластов. – М.: Недра, 1976. – 226 с.

5. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 440 с.

6. *Бермант А.Ф., Араманович И.Г.* Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1966. – 736 с.

Автор статьи:

Черданцев
Николай Васильевич:
докт.техн.наук, зав. лаб. геомеханики
угольных месторождений
Института угля СО РАН.
E-mail: cherdantsevnv@icc.kemsc.ru