ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ГРАНУЛОМЕТРИИ

Рассмотрим трехмерную дисперсную систему, у которой измерениям доступны лишь частицы на ее поверхности. В силу перекрытия частиц друг другом результаты таких измерений не образуют репрезентативную выборку и дают завышенное содержание крупных частиц и, следовательно, заниженное содержание мелочи.

Пусть x – наибольший линейный размер или диаметр частицы. При случайном выборе частицы ее диаметр есть случайная величина с некоторым законом распределения. Обозначим через $f(x)$ и $g(x)$ плотности распределения диаметра частиц соответственно для всей дисперсной системы и для частиц на ее поверхности. Тогда с учетом отмеченного выше свойства существует такое значение диаметра x_0, для которого справедливы неравенства

$$f(x) \geq g(x), \quad x \leq x_0;$$
$$f(x) \leq g(x), \quad x \geq x_0.$$

Этим условиям эквивалентно соотношение

$$f(x)=(x_0/x)^t g(x),$$

интегрирование которого по всем значениям диаметра приводит к взаимосвязям:

$$x_0^t=1/G(-t),$$
$$f(x)=g(x)/x^t G(-t),$$

где t – параметр, зависящий от случайной структуры дисперсной системы; G – начальные моменты распределения $g(x)$, порядок которых указан в скобках. Умножая второе равенство на k– ю степень диаметра и интегрируя, получим взаимосвязь между моментами распределений:

$$F(k)=G(k-t)/G(-t),$$

где F – моменты распределения $f(x)$.

Таким образом, имея выборочные оценки моментов распределения диаметра частиц на поверхности дисперсной системы, можно легко найти любые гранулометрические характеристики частиц всей дисперсной системы. Пусть, например, получена аппроксимация закона распределения

$$G(x)=12x^2(1-x), \; x\in(0,1),$$

где за масштабную единицу принято наибольшее значение диаметра.

Для этого закона сходимость интеграла обеспечивается при $t\leq 2$. Полагая $t=2$, получим

$$G(-2)=6,\; G(-1)=2,$$
$$G(1)=3/5,\; G(2)=2/5.$$

Из установленных выше взаимосвязей имеем:

$$f(x)=2(1-x),$$
$$F(1)=1/3,\; F(2)=1/6.$$

Сравнивая квадраты коэффициентов вариации диаметра, равные 1/2 и 1/9 соответственно для распределений $f(x)$ и $g(x)$, видим, что вариация диаметра частиц всей дисперсной системы значительно превосходит аналогичный показатель для частиц на поверхности дисперсной системы.

Обратимся теперь к случаю, когда информация о частицах представлена их случайными проекциями на фотопланограмме. В этом случае диаметр проекции z является случайной долей диаметра самой частицы, расположенной на поверхности дисперсной системы, т.е.

$$z=ux,\; p\leq u\leq 1,$$

где p равно отношению наименьшего линейного размера частицы к ее диаметру и характеризует форму частицы.

Здесь случайная величина u не зависит от x и равномерно распределена с моментами

$$E(k)=\frac{1-p^{k+1}}{(1-p)(k+1)}.$$

Обозначим через $M(k)$ моменты распределения диаметра проекции. Тогда в силу независимости случайных величин u,x справедливо соотношение

$$G(k)=M(k)/E(k)=$$
$$=\frac{(k+1)(1-p)M(k)}{1-p^{k+1}}.$$

Итак, имея выборочные оценки моментов распределения диаметра проекций частиц на фотопланограмме, равные средним значениям k-й степени диаметра, а также значение характеристики p, находим значения величин $G(k)$ и $F(k)$.

Для многих дисперсных систем (в частности, для продуктов дробления горных пород) величина p имеет незначительную вариацию со средним значением 2/3. Принимая это среднее значение, получим:

$E(-2)=3/2,\; E(-1)=3ln(3/2)\sim 6/5,$
$E(1)=5/6,\; E(2)=18/27.$

Отсюда для двух значений параметра t имеем:

$t=1$: $F(1)=(5/6)\,M(-1),$
$F(2)=(36/25)\,M(1)/M(-1),$
$t=2$: $F(1)=(5/4)\,M(-1)/M(-2),$
$F(1)=(3/2)\,/\,M(-2).$

Далее рассмотрим случай, когда информация о частицах представлена их сечениями случайной плоскостью. Примерами таких ситуаций могут служить петрографический анализ шлифов или изучение естественной блочности породного массива.

Восстановление геометрических свойств трехмерных объектов по их сечениям является основной проблемой стереологии, объединяющей методы интегральной геометрии и теории вероятностей. Известны решения лишь некоторых частных задач из этой области. Так, если частицы являются шарами, а диаметр шаров и диаметр их сечений случайной плоскостью распределены с моментами соответственно $F(k)$ и $H(k)$, то

$$F(1)=\pi / 2H(-1),$$

$$F(2)=2H(1) / H(-1) .$$

Приведем общее решение задачи, свободное от постулирования формы частиц. Пусть $W=mx$ - диаметр сечения частицы, являющийся случайной долей m от диаметра самой частицы. Случайная величина m распределена на отрезке от 0 до 1 с плотностью

$$r(s)=(n+1)s^n , n\geq 0$$

и начальными моментами

$$R(k)=(n+1)/(n+k+1) .$$

Условие существования момента $R(-2)$ налагает ограничение $n\geq 2$. При минимальном значении этого параметра $n=2$ получим

$$F(k+1)=\frac{(k+3)H(k)}{2H(-1)}.$$

Отсюда для первых двух моментов имеем значения

$$F(1)=3 / 2H(-1),$$

$$F(2)=2H(1) / H(-1) .$$

Сравнивая эти соотношения с аналогичными взаимосвязями для шаров, видим, что вторые моменты совпадают, а первые отличаются лишь заменой числа π на число 3. Это подтверждает адекватность построенной модели. Но основным ее преимуществом является отсутствие требования геометрического подобия частиц дисперсной системы.

Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт. техн.наук, проф., зав. каф. высшей математики

УДК 519. 17

А.В. Бирюков, П.А. Бирюков

О ГИПОТЕЗЕ ГАЛЛАИ

Любой граф можно разбить на простые цепи без общих ребер. Наименьшее число простых цепей, образующих разбиение графа G, обозначим через $p(G)$. Гипотеза Галлаи (1962) утверждает, что

$$p(G)\leq[(n+1)/2]. \qquad (1)$$

для любого связанного графа порядка n. Эта гипотеза до сих пор не доказана [1]. Представляют интерес оценки $p(G)$ для различных классов графов. Например, можно показать, что $p(G) \leq n/2$ для любого дерева G порядка n, причем равенство имеет место в случае, когда дерево является звездой.

Пусть G - регулярный граф нечетной степени $2k+1$, имеющий n вершин и m ребер. Тогда n четно, поскольку $n(2k+1)=2m$. Если граф G разбивается на p простых цепей, то сумма их порядков равна $m+p$. Так как через каждую вершину проходит не менее чем $k+1$ цепей, получаем неравенство

$$n(k+1) \leq m+p ,$$

из которого следует, что $p\geq n/2$.

Таким образом, если гипотеза Галлаи верна, то для любого связного регулярного графа нечетной степени выполняется равенство

$$p(G)=n/2. \qquad (2)$$

Например, полный граф K_n четного порядка разбивается на $n/2$ гамильтоновых цепей [2], поэтому $p(K_n)=n/2$.

Вершинами k – мерного куба Q^k являются двоичные последовательности длины k, образующие векторное пространство над полем вычетов по модулю 2. Вершины $x=x_1,\ldots,x_k$ и $y=y_1,\ldots,y_k$ смежны, если $x_j\neq y_j$ для некоторого j и $x_j=y_j$ при $i\neq j$. Таким образом, Q^k - регулярный граф степени k, имеющий 2^k вершин и $k\cdot 2^k$ ребер. Построим в нем простую цепь $C=v_0v_1\ldots v_k$, где

$$v_0=00..0,\ v_1=10\ldots 0,\ \ldots,$$

$$v_k=11\ldots 1.$$

Параллельные переносы пространства Q^k сохраняют смежность, т.е. являются автоморфизмами графа. Поэтому параллельный перенос на вектор a переводит простую цепь C в простую цепь

$$C+a=v_0+a,\ldots,v_k+a.$$

Легко проверить, что любые две такие цепи $C+a$ и $C+b$ либо совпадают, либо не имеют общих ребер, и любое ребро куба принадлежит цепи $C+a$ для некоторого a. Получаем разбиение k – мерного куба на 2^{k-1} простых цепей вида $C+a$.

Из (2) следует, что

$$p(Q^k)=2^{k-1} \qquad (3)$$

для куба нечетной размерности k. С другой стороны, для любо-