таких ситуаций могут служить петрографический анализ шлифов или изучение естественной блочности породного массива.

Восстановление геометрических свойств трехмерных объектов по их сечениям является основной проблемой стереологии, объединяющей методы интегральной геометрии и теории вероятностей. Известны решения лишь некоторых частных задач из этой области. Так, если частицы являются шарами, а диаметр шаров и диаметр их сечений случайной плоскостью распределены с моментами соответственно $F(k)$ и $H(k)$, то

$$F(1)=\pi / 2H(-1),$$

$$F(2)=2H(1) / H(-1) .$$

Приведем общее решение задачи, свободное от постулирования формы частиц. Пусть $W=mx$ - диаметр сечения частицы, являющийся случайной долей m от диаметра самой частицы. Случайная величина m распределена на отрезке от 0 до 1 с плотностью

$$r(s)=(n+1)s^n , n\geq 0$$

и начальными моментами

$$R(k)=(n+1)/(n+k+1) .$$

Условие существования момента $R(-2)$ налагает ограничение $n\geq 2$. При минимальном значении этого параметра $n=2$ получим

$$F(k+1)=\frac{(k+3)H(k)}{2H(-1)}.$$

Отсюда для первых двух моментов имеем значения

$$F(1)=3 / 2H(-1),$$

$$F(2)=2H(1) / H(-1) .$$

Сравнивая эти соотношения с аналогичными взаимосвязями для шаров, видим, что вторые моменты совпадают, а первые отличаются лишь заменой числа π на число 3. Это подтверждает адекватность построенной модели. Но основным ее преимуществом является отсутствие требования геометрического подобия частиц дисперсной системы.

 Автор статьи:
Бирюков
Альберт Васильевич
- докт. техн.наук, проф., зав. каф.
высшей математики

УДК 519. 17

А.В. Бирюков, П.А. Бирюков

О ГИПОТЕЗЕ ГАЛЛАИ

Любой граф можно разбить на простые цепи без общих ребер. Наименьшее число простых цепей, образующих разбиение графа G, обозначим через $p(G)$. Гипотеза Галлаи (1962) утверждает, что

$$p(G)\leq[(n+1)/2]. \qquad (1)$$

для любого связанного графа порядка n. Эта гипотеза до сих пор не доказана [1]. Представляют интерес оценки $p(G)$ для различных классов графов. Например, можно показать, что $p(G) \leq n/2$ для любого дерева G порядка n, причем равенство имеет место в случае, когда дерево является звездой.

Пусть G - регулярный граф нечетной степени $2k+1$, имеющий n вершин и m ребер. Тогда n четно, поскольку $n(2k+1)=2m$. Если граф G разбивается на p простых цепей, то сумма их порядков равна $m+p$. Так как через каждую вершину проходит не менее чем $k+1$ цепей, получаем неравенство

$$n(k+1) \leq m+p ,$$

из которого следует, что $p\geq n/2$.

Таким образом, если гипотеза Галлаи верна, то для любого связного регулярного графа нечетной степени выполняется равенство

$$p(G)=n/2. \qquad (2)$$

Например, полный граф K_n четного порядка разбивается на $n/2$ гамильтоновых цепей [2], поэтому $p(K_n)=n/2$.

Вершинами k – мерного куба Q^k являются двоичные последовательности длины k, образующие векторное пространство над полем вычетов по модулю 2. Вершины $x=x_1,\ldots,x_k$ и $y=y_1,\ldots,y_k$ смежны, если $x_j\neq y_j$ для некоторого j и $x_j=y_j$ при $i\neq j$. Таким образом, Q^k - регулярный граф степени k, имеющий 2^k вершин и $k\cdot 2^k$ ребер. Построим в нем простую цепь $C=v_0v_1\ldots v_k$, где

$$v_0=00..0,\ v_1=10\ldots 0,\ \ldots,$$

$$v_k=11\ldots 1.$$

Параллельные переносы пространства Q^k сохраняют смежность, т.е. являются автоморфизмами графа. Поэтому параллельный перенос на вектор a переводит простую цепь C в простую цепь

$$C+a=v_0+a,\ldots,v_k+a.$$

Легко проверить, что любые две такие цепи $C+a$ и $C+b$ либо совпадают, либо не имеют общих ребер, и любое ребро куба принадлежит цепи $C+a$ для некоторого a. Получаем разбиение k – мерного куба на 2^{k-1} простых цепей вида $C+a$.

Из (2) следует, что

$$p(Q^k)=2^{k-1} \qquad (3)$$

для куба нечетной размерности k. С другой стороны, для любого четного k существует разбиение k – мерного куба на $k/2$ гамильтоновых циклов [3], откуда вытекает неравенство $p(Q^k) \le k$. Эта оценка неточна. Как показывает следующее разбиение четырехмерного куба на три простых цепи:

0, 4, 6, 7, 3, B, A, 8, 9, 1, 5,D, C ;
0, 2, A, E, C, 4, 5, 7, F, D, 9, B ;
C, 8, 0, 1, 3, 2, 6, E, F, B

(здесь использована шестнадцатеричная нумерация $0_{16}=0000_2$, $1_{16}=0001_2,\ldots$, $A_{16}=1010_2\ldots$, $F_{16}=1111_2$, т.е. номер вершины $x=x_1x_2x_3x_4$ есть $8x_1+4x_2+2x_3+x_4$). Итак, $p(Q^4)=3$.

Рассмотрим теперь граф, порожденный разбиением плоскости случайными прямыми. Пусть на плоскости даны m прямых, находящихся в общем положении, т.е. никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Вершинами графа G являются точки пересечения прямых, а ребрами – отрезки, на которые эти точки разбивают прямые. Вершины и ребра, лежащие на одной прямой, образуют простую цепь порядка $m-1$ поэтому граф имеет порядок $n-m(m-1)/2$ и разбивается на m простых цепей, т.е.

$$p(G) \le m = \left(1+\sqrt{1+8n}\right)/2. \tag{4}$$

Таким образом, гипотеза Галлаи верна и для этого класса графов, поскольку $m \le n/2$ при $m \ge 5$, а для $m=3,4$ непосредственная проверка показывает, что $P(G)=2 \le (n+1)/2$.

Решетка $G(m,n)$ это граф порядка mn, вершинами которого являются точки плоскости с целыми координатами (x,y), где $1 \le x \le m$, $1 \le y \le n$. Вершина (x,y) смежна с вершиной (u,v), если $|x-u|+|y-v| =1$. Покажем, что

$$P(G(m,n))=m+n-4 \tag{5}$$

при $m \ge 4$ и $n \ge 2$, а также при $m=n=3$. Предположим, что решетка разбивается на p простых цепей. Кратностью вершины назовем число проходящих через нее цепей. Пусть n_i - число вершин кратности i, где $i=1,2,3,4$. Тогда

$$n_1+n_2+n_3+n_4=mn. \tag{6}$$

Число ребер графа $G(m,n)$ равно $2mn-m-n$. Сумма кратностей вершин равна сумме порядков цепей, т.е.

$$\begin{aligned} &n_1+2n_2+3n_3+4n_4= \\ &=2mn-m-n+p. \end{aligned} \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$n_2+2n_3+3n_4=mn-n-p. \tag{8}$$

Очевидно, $n_1 \le 4$, поэтому из (6) и (8) получаем:

$$\begin{aligned} &mn-m-n+p \ge \\ &\ge n_2+n_3+n_4 \ge mn-4, \end{aligned}$$

откуда

$$p \ge m+n-4. \tag{9}$$

Для доказательства обратного неравенства при $m \ge 4$ и $n \le 2$ построим две цепи: первая цепь обходит границу решетки по часовой стрелке от вершины (2,1) к вершине (3,1), а вторая проходит через вершины

$$(2,n),(2,n-1),\ldots,(2,1),$$
$$(3,1),(3,2),\ldots,(3,n).$$

Остальные ребра решетки разбиваются на $n-2$ горизонтальных и $m-4$ вертикальных цепей. Таким образом,

$$\begin{aligned} &p(G(m,n)) \le 2+(n-2)+ \\ &+(m-4)=m+n-4. \end{aligned} \tag{10}$$

Из (9) и (10) вытекает равенство (5). Оно выполняется и при $m=n=3$, поскольку граф $G(3,3)$ можно разбить на две цепи, одна из которых проходит через вершины (2,3), (1,3), (1,2), (1,1), (2,1), (2,2), (3,2). Тем самым гипотеза Галлаи доказана для всех решеток (включая $G(2,2)$ и $G(3,2)$, для которых $p=2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Unsolved Problems. http://www.math.fau.edu/locke/unsolved.htm
2. *Харари* Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
3. *Stong R.* Hamilton decompositions of Cartesian products of graphs// Discr. Math., 1991, v. 90, n. 2, pp. 169-190.

 Авторы статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт. техн.наук, проф., зав. каф. высшей математики

Бирюков
Петр Альбертович
- канд.физ.-мат.наук, доц.каф. алгебры и геометрии КемГУ