

УДК 656.135.073

А.Ю. Тюрин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНТЕГРИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ПОСТАВОК И СБЫТА ПРОДУКЦИИ

Применение принципов логистики на предприятии становится необходимым условием производственной деятельности на современном этапе. Сокращение собственных затрат с сохранением уровня сервисного обслуживания потребителей возможно только при рассмотрении цепи «поставщик - транспорт - производство - транспорт - потребитель» как интегрированной системы, где транспорт является связующим звеном в этой системе, ритм его работы зависит от ритма закупок, производства и сбыта продукции. При этом на выбор вида транспорта влияют физико-химические свойства грузов, его объемно-массовые характеристики, нормы естественной убыли, тип тары и упаковки и требования по сохранению качества товара в процессе доставки.

Учитывая перечисленное, рассмотрим математическую модель интегрированной системы поставок и сбыта продукции. Исследование будем вести в течение года с интервалом в один месяц (для систем с быстрым изменением уровня производства и спроса период наблюдения и интервал могут быть меньшими, например, месяц и сутки соответственно). При рассмотрении системы будем учитывать экономические и технологические особенности, такие как изменение уровня цен и тарифов во времени, скидки с покупки, емкость складской площади, период задержки поставок, производственная мощность предприятия, тип (грузоподъемность) транспортного средства и т.д.

Так как исследование системы ведется в течение некоторого периода времени и в ней возможны существенные изменения, то в качестве прототипа лучше выбрать динамическую модель. Весь процесс управления в динамической интегрированной системе разбивается на 3 этапа:

- на основе динамики спроса определение производственной программы выпуска продукции (определение необходимой производственной мощности по периодам);
- на основе спроса и производственной мощности с учетом ограничений складской площади формирование графика поставок сырья на предприятие;
- на основе спроса и принципа быстрого реагирования определение графиков доставки готовой продукции конечным потребителям.

Проведем анализ этапов более подробно.

Определение производственной программы выпуска продукции

Рассмотрим следующую ситуацию: на производственное предприятие согласно графику (например, ежемесячно) поступают требования на производство продукции (спрос).

Так как спрос колеблется по месяцам, то возникает задача расчета таких месячных производственных программ, чтобы переменный спрос на продукцию был удовлетворен и суммарные затраты при этом были минимальными. В этой ситуации возможны два варианта: 1) установить постоянный средний уровень производства и тогда максимальная потребность будет удовлетворяться за счет производства в данном месяце и части продукции, не использованной в месяцы с пониженным спросом; 2) установить переменный уровень производства, совпадающий с месячной потребностью в продукции.

В первом варианте, на протяжении планируемого периода, изменений в выпуске продукции происходить не будет. Но переменный спрос при таком постоянном среднем уровне производства приведет к тому, что в отдельные месяцы (с пониженным спросом) производство будет превышать потребности и в результате будут создаваться запасы, хранение которых потребует дополнительных издержек.

При втором варианте разрыв между уровнями спроса и потребления устраняется и в образовании запасов нужда отпадает, но такой режим производства потребует больших затрат, связанных с наращиванием производственной мощности в месяцы максимального спроса и недоиспользованием ее в месяцы с пониженным спросом.

Соответственно, требуется выбрать компромиссный вариант, при котором достигается минимум затрат, связанных с хранением запасов продукции и с колебаниями уровня производства.

Обозначим через r_k спрос и через z_k производительность предприятия на k -м шаге (в k -м месяце), $k=1, N$. Так как для своевременного обслуживания потребителей требуется, чтобы спрос всегда удовлетворялся, то $z_k \geq r_k, k=1, N$.

Введем две функции

- $g_k(z_k - r_k)$ - убытки на k -м шаге из-за избытка производственной мощности и возникновения запасов $z_k > r_k, k=1, N$;

- $h_k(z_k - z_{k-1})$ - убытки на k -м шаге из-за изменения уровня производства $z_k \neq z_{k-1}, k=1, N$.

Отсюда для минимизации суммарных издержек целевая функция определяется выражением

$$L(z_1, z_2, \dots, z_N) = \sum_{k=1}^N [g_k(z_k - r_k) + h_k(z_k - z_{k-1})] \rightarrow \min \quad (1)$$

при ограничениях

$$z_k \geq r_k, k=1, N. \quad (2)$$

Данная задача может быть решена методом динамического программирования [1]. Обозначим через $f_k(z_{k-1})$ суммарные издержки при оптимальной производственной программе за $N-k+1$ шагов, начиная с k -го до N -го включительно. Тогда оптимальное решение можно получить с помощью рекуррентных соотношений

$$f_k(z_{k-1}) = \min_{z_k \geq r_k} \left\{ \begin{array}{l} g_k(z_k - r_k) + h_k(z_k - z_{k-1}) \\ + f_{k+1}(z_k) \end{array} \right\}, k = \overline{1, N} \quad (3)$$

где

$$r_{k-1} \leq z_{k-1} \leq \max_k r_k, k = \overline{1, N}, \quad (4)$$

$$r_k \leq z_k \leq \max_k r_k, k = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Естественно принять

$$f_{N+1}(z_N) = 0, r_0 = 0.$$

Рассмотрим пример для длительности в один год с интервалом в месяц, т.е. $N=12$. Спрос за год представлен в табл. 1.

Издержки из-за переизбытка производственной мощности и возникновения запасов принимаются равными 2400 р. на 1 т при $z_k > r_k$.

Затраты на увеличение производительности предполагают равными 3200 р. на 1 т при $z_k > z_{k-1}$, а затраты на уменьшение производительности - равными 1200 р. на 1 т при $z_k < z_{k-1}$. Решение рекуррентных уравнений (3) с учетом ограничений (4-5) дает производственную программу за год, представленную в табл. 2. Общие издержки составят 65200 р.

Формирование графика поставок сырья на предприятие

Для производства товара используется сырье, потребность в котором определяется спросом на конечную продукцию. Выбор вида транспорта производится на основании минимальных совокупных затрат в процессе товародвижения, типа груза и требований, предъявляемых к нему, срочности и надежности поставки. Для выбора моментов предъявления заказов на пополнение сырьем производителей выбирают динамическую модель

в виде процесса с периодом, равным году и временным интервалом в один месяц, и возможностью учета динамики расходования сырья и изменения стоимостных параметров во времени.

Обозначим через t индекс месяца, отстоящего на t шагов до конца N -шагового процесса ($t=1$ соответствует последнему шагу, а $t=N$ - первому). Обозначим через q_t - объем поставки сырья в первом из t моментов времени, t ; y_t - расход данного вида сырья на складе на отрезке времени $[t, t+1]$, т; $G_t(q_t)$ - затраты на доставку заказа размером q_t , р.; S_{xpt} - затраты на хранение единицы запаса на складе на отрезке времени $[t, t+1]$, р./т; C_{mt} - стоимость 1 т груза, р.; $S_{xpt}(q_t)$ - удельные затраты на проведение погрузочно-разгрузочных операций, включая затраты на использование погрузочно-разгрузочных механизмов, р./т.

Тогда суммарные затраты $L(q_1, q_2, \dots, q_k)$, которые необходимо свести к минимуму, определяются из выражения:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_k) = \sum_{t=1}^k \left[G_t(q_t) + S_{xpt} \times (I_t + q_t - y_t) + C_{mt} q_t + S_{np_t}(q_t) \times q_t + S_{np_{(t+t')}}(q_t) \times q_t \right] \rightarrow \min \quad (6)$$

при ограничениях:

- на вместимость хранилищ склада $I_{cmp} \leq I_t + q_t - y_t \leq V, t = \overline{1, k}; \quad (7)$

- по загрузке транспортных средств $q_t \leq gN, t = \overline{1, k}; \quad (8)$

- на неотрицательность переменных $q_t \geq 0, t = \overline{1, k}; \quad (9)$

где I_t - текущий уровень запасов сырья на складе потребителя на начало месяца (этапа) t , т; V - максимальный запас (вместимость хранилища), т; I_{cmp} - минимальный (страховой) уровень запасов для обеспечения бесперебойной работы предприятия на случай возможной задержки поставки, т; g - вместимость одного автомобиля заданной грузоподъемности для доставки сырья потребителю, т;

Таблица 1

Динамика спроса за год

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_{k,T}$	21	14	12	18	21	21	19	9	14	15	15	10

Таблица 2

Производственная программа за год

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$z_{k,T}$	21	14	14	18	21	21	19	14	14	15	15	10

N - количество автомобилей для перевозки сырья потребителю.

В модели предполагается разделение затрат на проведение погрузочных и разгрузочных операций, а именно учет затрат на осуществление разгрузочных операций только после доставки сырья потребителю.

Поэтому в модели введены следующие обозначения: $S_{np_t}(q_t) \times q_t$ - затраты на погрузочные операции на этапе t ; $S_{np_{(t+t')}}(q_t) \times q_t$ - затраты на разгрузочные операции после доставки сырья на этапе $t+t'$.

Здесь t' – время доставки сырья потребителю. Перевозка заказанного сырья производится целыми единицами транспорта, т.е. целым количеством автомобилей, чтобы снизить затраты на доставку. В модели учитывают и скидки с цены на продукцию, зависящие от объемов поставки.

Обозначим через $W_t(q_t)$ затраты на приобретение, погрузку, транспортировку потребителю и хранение сырья на этапе t , а через $W_{(t+t')}(q_t)$ - затраты на разгрузочные операции на этапе $t+t'$:

$$W_t(q_t) = G_t(q_t) + C_{m_t} q_t + S_{np_t}(q_t) \times q_t + S_{xp_t} \times I_t; \quad (10)$$

$$W_{(t+t')}(q_t) = S_{np_{(t+t')}}(q_t) \times q_t. \quad (11)$$

Данная задача может быть решена методом динамического программирования. Обозначим через $f_t(I_{t+1})$ суммарные затраты за периоды с 1 по t при заданной величине запаса I_{t+1} на конец этапа t и при оптимальной политике поставок сырья. Тогда оптимальное решение можно получить с помощью рекуррентных соотношений

$$f_t(I_{t+1}) = \min_{0 \leq q_t \leq y_t + I_{t+1}} \{W_t(q_t) + W_{(t+t')}(q_t) + f_{t-1}(I_{t+1} + y_t - q_t)\}, \quad t = \overline{1, k}, \quad (12)$$

где

$$I_1 \geq \sum_{s=1}^{t'} y_s; \quad 0 \leq I_{t+1} \leq \sum_{s=t+1+t'}^k y_s, \quad t = \overline{1, k}; \quad (13)$$

$$q_t \in A_t \cap B, \quad t = \overline{1, k}; \quad (14)$$

$$A_t \in [0; \min \{y_{(t+t')} + I_{t+1}; V\}], \quad t = \overline{1, k};$$

$$B \in [0; gN]. \quad (15)$$

Для решения задачи также используем выражения $f_0(I_1) = 0$.

Рассмотрим контрольный пример. Потребность в сырье за год зависит от спроса на конечную продукцию, представленного в табл. 1. Для доставки сырья используются автомобили грузоподъемностью $g=8$ т. Максимальное количество автомобилей для перевозки сырья потребителю в месяц N принимают равным 4. Емкость склада V принимают равной 400 т. Текущий запас на складе на момент начала наблюдения I_1 , страховой запас I_{cmp} и время задержки поставки t' принимаем равными 0. Исходные данные по транспортным тарифам G_t , стоимости товара C_{m_t} , затратам на хранение S_{xp_t} и погрузочно-разгрузочные операции S_{np_t} приведены в табл. 3.

Кроме того, затраты на разгрузку $S_{np_{(t+t')}} = S_{np_t} + 100$.

Система скидок выглядит следующим образом: при закупках сырья в объеме от 4 до 10 т поставщик делает скидку в 2 %, от 11 до 25 т - 3 %, от 26 до 40 т - 5 %, от 41 до 80 т - 7 %, свыше 80 т - 10 %.

Используя перечисленные выше экономические и технологические параметры, определим оптимальные объемы поставок сырья в течение года. Результаты расчетов при оптимальной политике поставок сырья в сравнении со спросом отражены на рисунке. Движение расходов по месяцам по различным элементам затрат (погрузка, хранение, транспортировка, приобретение и разгрузка) при оптимальной политике поставок представлено в табл. 4.

Анализируя результаты, представленные на рисунке, можно сделать вывод, что поставки сырья осуществляются автомобилями в количестве 16 т в 4 месяца, в количестве 24 т - в 1 месяц, в количестве 32 т - во 2 и с 5 по 8 месяц. Таким образом формируют от 2 до 4 поставок в месяц автомобилями грузоподъемностью 8 т.

Таблица 3

Исходные данные за год

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_t , р.	650	650	780	780	1170	1170	1560	1560	1820	1820	1950	1950
C_{m_t} , р./кг	7,5	7	7	6	4	3	3,5	4,5	6	6,5	7	7,5
S_{xp_t} , р./т	40	40	40	50	50	50	60	60	60	70	70	70
S_{np_t} , р./т	11,25	11,25	11,25	11,25	13,75	13,75	13,75	13,75	18,75	18,75	18,75	18,75

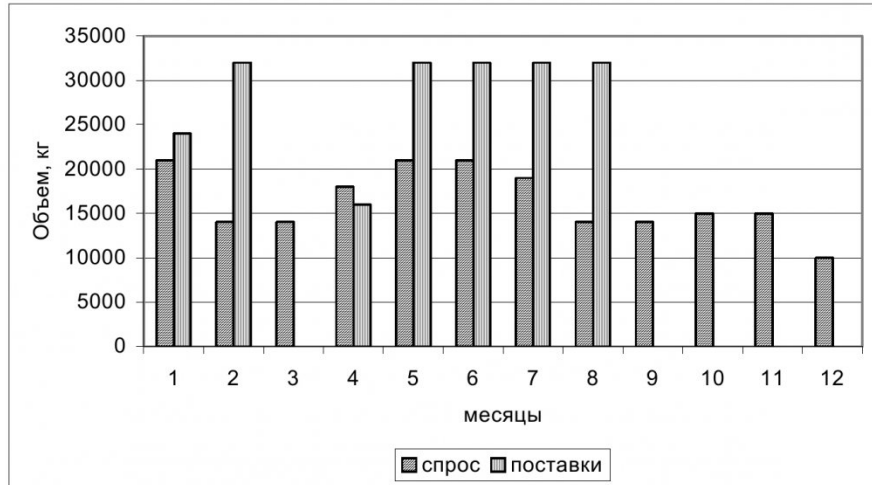
Определение графиков доставки готовой продукции конечным потребителям. Рассмотрим логистическую систему сбыта готовой продукции. Процесс сбыта определяется соотношением между количеством подготовленных отгрузочных партий и наличием транспортных средств. В случае ограниченного режима работы транспортных средств на складе экспедиции накапливается запас готовой продукции, который необходимо вывезти в течение небольшого периода времени. Иначе могут исчерпаться ресурсы складской площади в связи с поступлением новой продукции.

Быстрое реагирование на предъявленный спрос и доставка свежей продукции позволят поддерживать объем продаж на достигнутом уровне, а задержка поставки, скорее всего, приведет к снижению спроса потребителей.

Таким образом, выбор оптимальных режимов взаимодействия в сбытовых системах должен происходить с учетом технологических особенностей производства и потребления, режимов работы транспорта на основе общих логистических издержек и возможных потерь вследствие неучета рассмотренных выше факторов.

Обозначим через x_{ij} - количество готовой продукции, отправляемое от поставщика в i -й период времени в j -й пункт потребления, ед.; N - общее количество потребителей.

Тогда суммарные затраты, которые необходимо свести к минимуму, определяются из выраже-



Соотношение между спросом и поставками за год

$$L(x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{1N}, x_{2N}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N [2C_{ij}^m l_j^n e_{ij} + C_{ij}^{ed} (s_{ij}^{cnp} - x_{ij}) + C_{ij}^{opz} + C_{ij}^3 (y_{св} / N - x_{ij})] \rightarrow \min \quad (16)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_{1j} + x_{2j} &= r_j, \quad j = \overline{1, N}; \\ 0 \leq x_{1j} &\leq x_1, \quad j = \overline{1, N}; \\ 0 \leq x_{2j} &\leq x_2, \quad j = \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$x_1 + x_2 \geq \sum_{j=1}^N r_j; \quad 0 \leq x_1 \leq \sum_{j=1}^N r_j; \quad (18)$$

где C_{ij}^m - транспортные расходы по доставке про-

Таблица 4

Движение расходов по месяцам

t	Затраты на разгрузку, р.	Затраты на погрузку, р.	Расходы на транспортировку, р.	Расходы на хранение, р.	Расходы на товар, р.	Общие расходы, р.
1	370	270	1950	120	174600	177310
2	460	360	2600	840	212800	217060
3	0	0	0	280	0	280
4	280	180	1560	250	93120	95390
5	540	440	4680	800	121600	128060
6	540	440	4680	1350	91200	98210
7	540	440	6240	2400	106400	116020
8	540	440	6240	3480	136800	147500
9	0	0	0	2640	0	2640
10	0	0	0	2030	0	2030
11	0	0	0	980	0	980
12	0	0	0	280	0	280
Сумма затрат	3270	2570	27950	15450	936520	985760

дукции на расстояние l_j от поставщика в i -й период времени в j -й пункт потребления, р./км; n_{eij} - количество ездов (рейсов), совершаемое автомобилем в i -й период времени в j -й пункт потребления; C_{ij}^{ed} - штраф за задержку поставки 1 ед. груза в i -й период времени в j -й пункт потребления, р./ед.; s_{ij}^{cnp} - спрос на готовую продукцию в i -й период времени в j -м пункте, ед.; C_{ij}^{opz} - организационные сборы на доставку продукции (уведомление о прибытии, оформление документов, канцелярские расходы и т.д.) в i -й период времени в j -й пункт потребления, р.; $y_{cв}$ - запас свежей продукции, предназначенный для первоочередного вывоза в 1 период времени, ед.; C_{ij}^3 - штраф за задержку вывоза запаса свежей продукции $y_{cв}$ от поставщика в i -й период времени в j -й пункт, р./ед.; r_j - спрос на готовую продукцию в j -м пункте потребления, ед.; x_1, x_2 - производственная программа выпуска готовой продукции в 1 и 2 период времени соответственно, ед.

Количество ездов n_{eij} определяют делением x_{ij} на грузоподъемность автомобиля и округления полученной величины до целого числа в большую сторону. Организационные сборы C_{ij}^{opz} равны нулю, если $x_{ij} = 0$, и равны постоянной C_{ij}^{opz} , если $x_{ij} > 0$. Штраф $C_{ij}^{ed}(s_{ij}^{cnp} - x_{ij})$ равен нулю при $s_{ij}^{cnp} - x_{ij} \leq 0$ и равен $C_{ij}^{ed}(s_{ij}^{cnp} - x_{ij})$, если $s_{ij}^{cnp} - x_{ij} > 0$, и способствует завозу продукции потребителям в соответствии со спросом, т.е. обеспечивается макси-

мальное реагирование на изменяющийся спрос. Штраф $C_{ij}^3(y_{cв} / N - x_{ij})$ равен нулю, если $y_{cв} / N - x_{ij} \leq 0$, равен $C_{ij}^3(y_{cв} / N - x_{ij})$, если $y_{cв} / N - x_{ij} > 0$ и регламентирует вывоз запаса свежей продукции от поставщика, равномерно распределенного по N потребителям.

Обозначим через $g_{1j}(x_{1j})$ общие потери (затраты и штрафы), связанные с доставкой готовой продукции в размере x_{1j} и отправляемой от поставщика в первый период времени в j -й пункт потребления, а через $g_{2j}(r_j - x_{1j})$ - общие потери, связанные с доставкой готовой продукции в размере $x_{2j} = r_j - x_{1j}$ и отправляемой от поставщика во 2-й период времени в j -й пункт потребления.

Тогда

$$L(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{1N}, x_{2N}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^N g_{im}(x_{im}).$$

Обозначим через $f_j(x_1)$ суммарные затраты при использовании оптимальной политики обслуживания j потребителей. Тогда оптимальное решение можно получить с помощью рекуррентных соотношений

$$f_j(x_1) = \min_{x_{1j}} \left\{ \begin{array}{l} g_{1j}(x_{1j}) + g_{2j}(r_j - x_{1j}) + \\ f_{j-1}(x_1 - x_{1j}) \end{array} \right\},$$

$$j = \overline{1, N},$$

где x_{1j} удовлетворяет условиям

$$0 \leq x_{1j} \leq x_1, \quad j = \overline{1, N};$$

$$0 \leq r_j - x_{1j} \leq \sum_{j=1}^N r_j - x_1, \quad j = \overline{1, N}.$$

Областью изменения переменной x_1 в (19)

Таблица 5

Распределение спроса по заводам в течение месяца для 10 потребителей, %

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 завод	35%	79%	65%	40%	68%	14%	54%	45%	93%	66%
2 завод	65%	21%	35%	60%	32%	86%	46%	55%	7%	34%

Таблица 6

Распределение спроса по заводам в течение месяца для 10 потребителей, ед.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 завод	9	13	10	9	18	4	13	5	16	16
2 завод	17	4	5	14	8	22	11	6	1	9

Таблица 7

Расстояния до потребителей

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l_j , км	8	14	3	11	6	4	3	8	6	7

служит $\left[0, \sum_{j=1}^N r_j \right]$. Решая (19) с учетом ограничений (20)-(21), получим оптимальное количество продукции, которое нужно доставить в i -й период времени в j -й пункт потребления.

Рассмотрим пример практической реализации модели. Готовую продукцию доставляют потребителям грузовыми единицами равными 100 кг. Перевозку груза осуществляют на автомобиле грузоподъемностью 1 т или 10 ед. Завоз продукции происходит 2 раза в месяц. Распределение спроса по завозам представлено в табл. 5 и 6. В качестве периода исследования берут месяц с максимальным спросом из табл. 1 и выбирают производительность (производственную программу выпуска), соответствующую этому месяцу, из табл. 2. Для нашего случая это первый месяц со спросом $r_1=21$ т и производственной программой выпуска $z_1=21$ т. За месяц обслуживают 10 потребителей, т.е. $N=10$. Так как размер грузовой единицы составляет 100 кг, то всего необходимо доставить потребителям 210 ед. Отсюда спрос разбивают по 2 завозам согласно табл. 5 в соотношении 56 : 44 и выбирают производственную программу $x_1=210 \cdot 0.56=118$ ед.. Запас свежей продукции $U_{св}$ составляет 50 % от x_1 и равен 59 ед.

Дополнительно примем следующие значения экономических параметров:

$$C_{ij}^m = 10 \text{ р./км}, C_{ij}^{ед} = 64 \text{ р./ед.}, C_{ij}^{опе} = 15 \text{ р.},$$

$$C_{1j}^3 = 45 \text{ р./ед.}, C_{2j}^3 = 90 \text{ р./ед.}$$

Расстояния от отправителя до потребителей представлены в табл. 7.

В результате получаем оптимальное распределение завоза продукции потребителям по периодам времени, которое представлено в табл. 8, и на заключительном этапе формируем маршруты доставки грузов известными методами [2-4] с учетом ограничения на грузоподъемность.

Рассмотрение системы поставок и сбыта продукции как интегрированной системы с учетом ограничений, технологических и экономических особенностей позволяет оптимально распределить ресурсы по элементам системы, по различным

Таблица 8
Оптимальное распределение готовой продукции по периодам времени

№ потребителя	1 завоз, ед.	2 завоз, ед.	Месячная потребность, ед.
1	9	17	26
2	10	7	17
3	9	6	15
4	9	14	23
5	17	9	26
6	6	20	26
7	12	12	24
8	5	6	11
9	10	7	17
10	16	9	25
Сумма	103	107	210

периодам времени.

Использование транспорта как связующего элемента интегрированной системы приводит к формированию оптимального графика его работы как на стадии закупок, так и на стадии сбыта. Учет требований на срочность и надежность позволяет правильно закрепить транспортные средства за направлениями перевозок, определить их необходимый количественный состав, а также рационально сформировать структуру парка подвижного состава. Учет неравномерности работы транспорта и колебаний уровня транспортных тарифов позволит выработать политику по использованию собственного и привлекаемого транспорта.

Очевидно, что при использовании рассмотренной выше модели интегрированной системы поставок и сбыта продукции в прикладных целях необходим учет особенностей конкретного производства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования: Пер. с англ. /Под ред. А.А. Первозванского. - М.: Наука, 1965. - 460 с.
2. Житков В.А. Планирование автомобильных перевозок грузов мелкими партиями. - М.: Транспорт, 1976. - 112 с.
3. Геронимус Б.Л., Царфин Л.В. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте. - М.: Транспорт, 1988. - 192 с.
4. Корягин М.Е., Тюрин А.Ю. Планирование автомобильных перевозок в торговой сети. // Вестн. КузГТУ. - 2000. - №1. - С.43-45.

□ Автор статьи:

Тюрин
Алексей Юрьевич
– канд. экон. наук, доцент
каф. автомобильных перевозок.