ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

А. В. Бирюков

МИНИМАЛЬНЫЕ КОДЫ ГРАФОВ

Пусть имеется граф порядка N. Обозначим через V подмножество его вершин с числом элементов M. Если непустые пересечения окрестностей двух вершин графа с множеством V не совпадают, то эти вершины назовем V-отделимыми. Отметим, что окрестность вершины - это сама вершина и все с ней смежные.

Если любые две вершины графа являются V-отделимыми, то множество V называется кодом графа. Задача состоит в поиске кода с минимальным числом вершин, который назовем минимальным кодом. Для графа порядка N будем рассматривать также отношению $P=M/N$, характеризующее плотность кода. Тогда плотность минимального кода P_0 равна отношению M_0/N, где M_0 - наименьшее значение M.

Поскольку у кода с M вершинами число всех непустых подмножеств равно 2^M-1, то для M имеем нижнюю границу

$$M\geq log_2\ (N-1).$$

Поэтому для плотности кода получаем значения на отрезке

$$log_2\ (N+1)\ /\ N\leq P\leq 1.$$

Очевидно, что полный граф кода не имеет, так как окрестность каждой его вершины совпадает с множеством всех вершин графа. Для пустого графа (без ребер) минимальный код образуют все его вершины и, следовательно, $P_0=1$.

Плотность минимального кода достигает нижней границы далеко не у каждого графа. Однако можно указать алгоритм построения такого графа, для которого число вершин минимального кода равно целой части от $log_2\ (N+1)$ с округлением до целого по избытку. Такая конструкция имеет следующий вид.

Пусть имеется пустой граф порядка N с множеством вершин C. Для каждого подмножества $A\subset C$, содержащего два и более элементов, добавим новую вершину и соединим ее ребрами со всеми вершинами A.

Полученный таким образом новый граф с 2^N-1 вершинами будет иметь минимальный код, представленный множеством вершин C. Его плотность равна

$$P_0=N/(2^N-1),$$

т.е. с увеличением N величина P_0 может стать как угодно близкой к нулю.

Так, для пустого графа с вершинами 1,2,3 подмножества A имеют вид: 1, 2; 1, 3; 2, 3; 1, 2, 3. Каждому из них соответствуют новые вершины 4, 5, 6, 7, соединенные ребрами с вершинами пустого графа. Для полученного графа порядка 7 вершины 1, 2, 3 образуют минимальный код с плотностью 3/7.

В задачах минимального кодирования важную роль играют n-мерные кубы. Легко видеть, что в двумерном случае минимальный код образуют любые три вершины квадрата, т. е. P_0=3/4.

У трехмерного куба минимальный код образуют четыре вершины любой его грани. Поэтому для него P_0= 1/2.

Поскольку куб любой размерности является регулярным гамильтоновым графом, то у четырехмерного куба занумеруем вершины какого-либо гамильтонова цикла числами 1, 2,…,16. Кроме ребер цикла, ребрами этого графа являются следующие пары смежных вершин:

1,4	1,8	2,7	2,15
3,6	3,14	4,13	5,8
5,12	6,11	7,10	9,12
9,16	10,15	11,14	13,16

Поиск минимального кода приводит к множеству вершин гамильтонова цикла, номера которых образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5,…,15 или 2, 4, 6,…,16. Следовательно, у этого графа, как и в трехмерном случае, $P_0=1/2$.

Гипотеза: плотность минимального кода в кубе любой размерности $n\geq 3$ равна 1/2.

Нетрудно найти значения плотности минимального кода для некоторых простейших графов. Так, например, для платоновых многогранников октаэдра, додекаэдра, икосаэдра эти значения равны соответственно 1, 1/2, 1/2.

Для квадратной решетки с $N=n^2$ вершинами при четном значении n P_0=1/2, при нечетном - $P_0=(1-2/N)/2$. В последнем случае величина P_0 асимптотически стремится к 1/2 с увеличением размера решетки.

Для полного двудольного графа с N вершинами минимальный код образуют все вершины без одной любой вершины в каждой доле. При этом плотность минимального кода $P_0=(1-2/N)/2$стремится к 1/2 с увеличением порядка графа.

Назовем граф случайным,

если вероятность смежности его вершин равна 1/2. Поскольку у полного графа порядка N число ребер равно $N\ (N\text{-}1)/2$, то у случайного графа математическое ожидание числа ребер равно $N\ (N\text{-}1)/4$.

Рассмотрим случайные графы порядка 6, 7, 8 с числом ребер 8, 10, 14. При этом из общего количества неизоморфных графов случайным образом выберем по одному. Вычисление плотности минимального кода этих графов приводит к следующим результатам:

N	:	6	7	8
P_0	:	0,67	0,57	0,50.

Можно предположить, что плотность минимального кода случайных графов монотонно убывает и с увеличением порядка графа стремиться к нулю.

Большой класс графов образуют арифметические графы, у которых вершинами являются натуральные числа 1, 2,…,N. При этом условие смежности вершин определяется каким-либо арифметическим условием. В качестве такого условия рассмотрим следующее: две вершины являются смежными, если их сумма есть простое число.

Найдем значение плотности минимального кода таких графов при значении N, равном 6, 7, 8. Эти значения соответственно равны 0,67; 0,57; 0,50. Как видим, они полностью совпадают со значениями для случайных графов тех же порядков. Представляет интерес исследование такой взаимосвязи в общем случае.

УДК 519.21

А. В. Бирюков

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОНОПОЛИИ И ДОМИНИРУЮЩИЕ МНОЖЕСТВА В ГРАФАХ

В связанном графе рассмотрим динамическую систему с дискретным временем, в которой каждая вершина графа находится в одном из двух возможных состояний. Для удобства интерпретируем эти состояния цветом вершины - белым и черным.

Переход системы между состояниями осуществляем по правилу: в каждый момент времени вершина графа имеет тот цвет, который был у большинства смежных с ней вершин в предыдущий момент.

Если число белых и черных вершин, смежных с данной, одинаково, то условимся, что данная вершина становится (или остается) белой.

Пусть в начальный момент имеется некоторое множество белых вершин. При этом возможен случай, когда через несколько шагов времени все вершины графа станут белыми. В этом случае начальное множество белых вершин называется динамической монополией в данном графе. Будем именовать это множество термином «динамо», а процесс преобразования системы – n-шаговой динамикой.

Приведем результаты поиска динамо в некоторых графах.

В полном графе динамо образует одна любая его вершина. В полном двудольном графе динамо составляют две любые вершины, взятые по одной из каждой доли. Исключение составляет звезда (как частный случай полного двудольного графа), у которой динамо состоит из одной вершины. В названных графах динамика является одношаговой.

Многошаговой динамикой обладают циклы: при нечетном порядке цикла динамо образует одна его вершина, а при четном - две смежные вершины. Так, например, для цикла пятого порядка с вершинами 1, 2,…,5 трехшаговая динамика имеет вид: 1; 2, 5; 1, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5.

В трехмерном кубе с гамильтоновым циклом 1, 2,…, 8, 1 динамо образуют вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6 с одношаговой динамикой. Нетрудно убедиться, что это динамо минимально по числу вершин, поскольку варианты с меньшим числом белых вершин в начальной раскраске приводят к периодическому процессу. Например, начальная раскраска с черными вершинами 6, 7, 8 в следующие моменты времени делает черными вершины 5, 7; 6, 8;5, 7.

В четырехмерном кубе с гамильтоновым циклом 1, 2,…,16 динамо образуют вершины 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12. Естественно возникает вопрос, нельзя ли уменьшить мощность динамо хотя бы на единицу.

Для ответа на этот вопрос пришлось бы рассмотреть 11440 вариантов (число сочетаний из 16 по 7). Выберем случайным образом один из них с вершинами 1, 2, 3, 8, 9, 10, 15. Для этого варианта, начиная с третьего шага, процесс преобразования системы является периодическим с периодом, равным двум. Можно предположить, что этим свойством обладают и все остальные варианты, т.е. динамо из восьми вершин является минимальным.

Определим окрестность вершины как саму эту вершину и все смежные с ней. Доминирующим множеством в графе назовем подмножество его вершин, имеющее непустое пересечение с окрестностью любой вершины графа.

Очевидно, что все вершины графа образуют доминирующие