если вероятность смежности его вершин равна 1/2. Поскольку у полного графа порядка N число ребер равно $N\ (N\text{-}1)/2$, то у случайного графа математическое ожидание числа ребер равно $N\ (N\text{-}1)/4$.

Рассмотрим случайные графы порядка 6, 7, 8 с числом ребер 8, 10, 14. При этом из общего количества неизоморфных графов случайным образом выберем по одному. Вычисление плотности минимального кода этих графов приводит к следующим результатам:

N	:	6	7	8
P_0	:	0,67	0,57	0,50.

Можно предположить, что плотность минимального кода случайных графов монотонно убывает и с увеличением порядка графа стремиться к нулю.

Большой класс графов образуют арифметические графы, у которых вершинами являются натуральные числа 1, 2,…,N. При этом условие смежности вершин определяется каким-либо арифметическим условием. В качестве такого условия рассмотрим следующее: две вершины являются смежными, если их сумма есть простое число.

Найдем значение плотности минимального кода таких графов при значении N, равном 6, 7, 8. Эти значения соответственно равны 0,67; 0,57; 0,50. Как видим, они полностью совпадают со значениями для случайных графов тех же порядков. Представляет интерес исследование такой взаимосвязи в общем случае.

УДК 519.21

А. В. Бирюков

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОНОПОЛИИ И ДОМИНИРУЮЩИЕ МНОЖЕСТВА В ГРАФАХ

В связанном графе рассмотрим динамическую систему с дискретным временем, в которой каждая вершина графа находится в одном из двух возможных состояний. Для удобства интерпретируем эти состояния цветом вершины - белым и черным.

Переход системы между состояниями осуществляем по правилу: в каждый момент времени вершина графа имеет тот цвет, который был у большинства смежных с ней вершин в предыдущий момент.

Если число белых и черных вершин, смежных с данной, одинаково, то условимся, что данная вершина становится (или остается) белой.

Пусть в начальный момент имеется некоторое множество белых вершин. При этом возможен случай, когда через несколько шагов времени все вершины графа станут белыми. В этом случае начальное множество белых вершин называется динамической монополией в данном графе. Будем именовать это множество термином «динамо», а процесс преобразования системы – n-шаговой динамикой.

Приведем результаты поиска динамо в некоторых графах.

В полном графе динамо образует одна любая его вершина. В полном двудольном графе динамо составляют две любые вершины, взятые по одной из каждой доли. Исключение составляет звезда (как частный случай полного двудольного графа), у которой динамо состоит из одной вершины. В названных графах динамика является одношаговой.

Многошаговой динамикой обладают циклы: при нечетном порядке цикла динамо образует одна его вершина, а при четном - две смежные вершины. Так, например, для цикла пятого порядка с вершинами 1, 2,…,5 трехшаговая динамика имеет вид: 1; 2, 5; 1, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5.

В трехмерном кубе с гамильтоновым циклом 1, 2,…, 8, 1 динамо образуют вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6 с одношаговой динамикой. Нетрудно убедиться, что это динамо минимально по числу вершин, поскольку варианты с меньшим числом белых вершин в начальной раскраске приводят к периодическому процессу. Например, начальная раскраска с черными вершинами 6, 7, 8 в следующие моменты времени делает черными вершины 5, 7; 6, 8;5, 7.

В четырехмерном кубе с гамильтоновым циклом 1, 2,…,16 динамо образуют вершины 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12. Естественно возникает вопрос, нельзя ли уменьшить мощность динамо хотя бы на единицу.

Для ответа на этот вопрос пришлось бы рассмотреть 11440 вариантов (число сочетаний из 16 по 7). Выберем случайным образом один из них с вершинами 1, 2, 3, 8, 9, 10, 15. Для этого варианта, начиная с третьего шага, процесс преобразования системы является периодическим с периодом, равным двум. Можно предположить, что этим свойством обладают и все остальные варианты, т.е. динамо из восьми вершин является минимальным.

Определим окрестность вершины как саму эту вершину и все смежные с ней. Доминирующим множеством в графе назовем подмножество его вершин, имеющее непустое пересечение с окрестностью любой вершины графа.

Очевидно, что все вершины графа образуют доминирующие множество. Поэтому интересен случай, когда мощность доминирующего множества меньше порядка графа.

Рассмотрим предварительно несколько простых случаев. У полного графа доминирующее множество состоит из любой одной вершины. В полном двудольном графе доминируют любые две вершины, взятые по одной в каждой доле. Исключение составляет звезда с доминирующей одной центральной вершиной.

В трехмерном кубе доминируют две вершины, являющиеся концами диагонали куба. В октаэдре доминирующее множество образуют две несмежные вершины. В графе Петерсена с вершинами 1, 2,…,10 и ребрами 1-2, 1-5, 1-6, 2-3, 2-7, 3-4, 3-8, 4-5, 4-9, 5-10, 6-8, 6-9, 7-9, 7-10, 8-10 доминирующее множество состоит из вершин 1, 8, 9.

Более сложным является поиск доминирующих множеств в платоновых телах икосаэдре и додекаэдре, которые представляют собой гамильтоновы графы порядков 12 и 20. Если вершины икосаэдра занумеровать в порядке следования по гамильтонову циклу, то минимальное доминирующее множество образуют две вершины с номерами 1 и 9. Аналогичным образом находим минимальное доминирующее множество додекаэдра, состоящее из вершин с номерами 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20.

В заключение рассмотрим графы, вершинами которых являются натуральные числа 1, 2,…,n. При этом две вершины будем считать смежными, если их сумма есть простое число.

Найдем доминирующие множества таких графов, имеющих порядок 10, 20, 30, 40,50. Результаты вычислений приводят к вершинам соответственно 1. 7, 8; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5, 23; 1, 2, 3, 4, 5, 31; 1, 2, 3, 4, 5, 6. Доли доминирующих вершин составляют 0,3; 0,2;0,2; 0,15; 0,12, т.е. эти доли монотонно убывают с увеличением порядка графов.

.