ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

А.В. Бирюков

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Пусть вершинами графа являются натуральные числа $1,2,\ldots n$. Обозначим через A некоторое подмножество этих чисел и будем считать вершины x, z смежными, если выполняется по крайней мере одно из условий:

$$|x-z| \in A\ ,\ (n-|x-z|\,) \in A\ .$$

Из определения смежности следует, что наибольший элемент A не должен превосходить $n/2$. Если, в частности, подмножество A состоит из одного элемента, равного единице, то граф является простым циклом порядка n.

Рассмотрим одну из комбинаторных характеристик графа, которую назовем энтропией. В данном графе порядка n найдем все его подграфы третьего порядка, число которых равно

$$N=n(n-1)(n-2)/6\ .$$

Среди них различными являются четыре вида подграфов: цикл, цепь, ребро и несмежная с его концами вершина, три попарно несмежных вершины. Обозначим через N_1, N_2, N_3, N_4 количество подграфов каждого вида и найдем отношения $P_i=N_i/N$, $i=1 \div 4$, которые дают некоторое вероятностное распределение с энтропией

$$H=-\sum_{i=1}^{4} P_i L(P_i)\,/\,2$$

где через L обозначены логарифмы с основанием 2.

Построенная таким образом энтропия графа характеризует алгоритмическую сложность его описания и принимает значения на отрезке $0 \le H \le 1$.

Нулевой энтропией обладают графы, содержащие лишь один вид подграфов третьего порядка. Таким, например, является полный граф. Максимальная энтропия соответствует равномерному распределению, когда $P_1= P_2= P_3= P_4=1/4$.

Как легко видеть, для цикла порядка $n>3$

$$P_1=0,\ P_2=6/(n-1)(n-2),$$
$$P_3=6(n-4)/(n-1)(n-2),$$
$$P_4=1-P_2-P_3\ .$$

При этом с увеличением n энтропия цикла $H(n)$ асимптотически стремится к 0, поскольку величина P_4 стремится к единице. С другой стороны, $H(3)=H(4)=0$. Следовательно, функция $H(n)$ имеет максимум.

Как показывают вычисления, $H(6)=0{,}65$; $H(7)=0{,}68$; $H(8)=0{,}69$; $H(9)=0{,}68$, откуда видно, что наибольшую энтропию имеет цикл восьмого порядка.

Рассматриваемый класс графов содержит как связные, так и несвязные графы. Для того, чтобы граф был связным, необходимо и достаточно, чтобы все элементы подмножества A и порядок графа n в совокупности имели своим наибольшим делителем единицу, т.е. были взаимно просты. В частности, это условие выполняется, если $1 \in A$.

Так, например, при $n=8$ имеется 15 вариантов для подмножеств A. При этом из 15 графов лишь 3 графа являются несвязными. Это графы, отвечающие подмножествам (2), (4), (2,4). Первый из них представляет собой объединение двух циклов четвертого порядка, второй – объединение четырех попарно несмежных ребер, третий – объединение двух полных графов четвертого порядка. Энтропии этих несвязных графов равны соответственно 0,69; 0,49; 0,30.

Из связных графов экстремальные значения энтропии H=0,78, H=0,30 имеют графы, соответствующие подмножествам (1,3,4) и (1,3).

Рассмотрим еще один способ построения арифметических графов. Пусть, как и прежде, вершинами графа являются натуральные числа $1,2,\ldots n$. Будем считать две вершины смежными, если их сумма есть простое число.

Все такие графы являются связными и не содержат циклов третьего порядка. С увеличением n доля подграфов четвертого вида (троек попарно несмежных вершин) стремится к единице и, следовательно, энтропия графа асимптотически стремится к нулю.

С другой стороны, при n=4, как легко видеть, граф является циклом четвертого порядка с нулевой энтропией. Поэтому существует такой порядок графа, при котором энтропия достигает наибольшего значения.

Непосредственные вычисления энтропии графов порядка 6,7,8,9,10 дают значения 0,62; 0,72; 0,75; 0,74; 0,73. Отсюда видно, что наибольшей энтропией обладает граф восьмого порядка с ребрами (1,2); (1,4); (1,6); (2,3); (2,5); (3,4); (3,8); (4,7); (5,8); (6,7).

Относительно рассмотренного класса арифметических графов (вершины смежны, если их сумма есть простое число) сформулируем следующие недоказанные гипотезы:

1) диаметр всех графов при $n \geq 5$ равен трем;

2) графы четных порядков являются гамильтоновыми;

3) графы нечетных порядков содержат гамильтонову цепь;

4) множество вершин графа можно разбить на пары смежных.

Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт. техн. наук, проф.,
зав. каф. высшей математики

УДК 519.21

К.И. Гурьянов

ГРАФЫ НА ДИАГРАММАХ ВОРОНОГО

Пусть на плоскости задано случайное множество точек F. Требуется для точки A этого множества найти область, все точки которой являются ближайшими к точке A по сравнению с другими точками множества F. Эта область является пересечением полуплоскостей, т.е. выпуклым многоугольником, а точка A – его центром. Совокупность таких многоугольников, число которых равно числу точек множества F, и представляет собой диаграмму Вороного. Отметим, что некоторые из областей диаграммы могут быть незамкнутыми.

При компьютерном моделировании диаграмм вороного случайным образом выбирались N точек с координатами, принадлежащими единичному квадрату.

Вершины и ребра полигонов (за исключением границы квадрата) образуют односвязный граф. Рассмотрим следующие его характеристики: n – число вершин; m – число ребер; H – энтропия графа, характеризующая алгоритмическую сложность его описания.

Для определения энтропии графа рассмотрим все его подграфы третьего порядка, число которых равно $A=n(n-1)(n-2)/6$. Среди них неизоморфными являются лишь 4 подграфа: цикл, цепь из двух звеньев, ребро и вершина (несмежная с концами ребра), три попарно несмежные вершины. Обозначим через A_i $(i=1, 2, 3, 4)$ число подграфов каждого из этих типов и найдем отношение $P_i=A_i/A$. При этом энтропию графа определим неотрицательным числом

$$H = -\left(\sum_{i=1}^{4} P_i \log_2 P_i \right) / 2.$$

Из определения энтропии следует, что $H \in [0;1]$. Наибольшее её значение $H=1$ соответствует случаю, когда все числа P_i одинаковы и равны 1/4. Нулевой энтропией обладает граф, для которого одно из чисел P_i равно единице, а остальные – нулю. Отметим, что при $P_i=0$ соответствующее слагаемое суммы в определении энтропии также равно нулю, что следует из предельного перехода. В частности, $H=0$ для полного и для пустого (без ребер) графов.

Компьютерное моделирование диаграммы вороного, выполнено для $N=($20, 40, 60, 80,100, 150, 200,300). Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Из приведенных данных видно, что с увеличением числа

Таблица 2

N	P1	P2	P3	P4
20	0,03	0	0,33	0,63
40	0	0	0,14	0,86
60	0	0	0,09	0,91
80	0	0	0,06	0,93
100	0	0	0,05	0,95
150	0	0	0,03	0,97
200	0	0	0,02	0,98
300	0	0	0,02	0,98

Таблица 1

N	*n*	*M*	*H*
20	19	23	0,56
40	55	74	0,31
60	91	126	0,23
80	126	175	0,18
100	164	231	0,15
150	247	349	0,11
200	345	494	0,08
300	541	784	0,05

Таблица 3

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11
20	1			2	2				
40		2	7	8	3				
60		7	8	11	7		1		1
80	2	4	14	17	9	4			
100	1	4	16	29	6	7	2		
150		10	30	31	22	9			
200	3	13	45	44	27	13	3	1	
300	1	32	69	59	55	18	10		