

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

**УДК 519.872.1**

**В.А. Чекменев, М.П. Калинина**

### **ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОЛИНЕЙНОЙ МАРКОВСКОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ, ФУНКЦИОНИРУЮЩАЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

Системы массового обслуживания являются математическими моделями широкого класса реальных объектов, таких как автоматизированные информационные системы, системы связи, транспортные системы и т.п.

Обычно такие системы исследовались и оптимизировались с точки зрения одного критерия, который отражал эффективность работы самой системы обслуживания, с заданными нормативными ограничениями по обслуживанию пользователей [1]. Однако, существование конкуренции между входящими потоками, наличие неопределенностей, порождаемых стохастической природой поступающих в систему потоков информации, неполнотой знаний о состоянии каналов передачи, необходимостью учета требований различных пользователей требует новых подходов к исследованию и оптимизации, в частности, следует учитывать представления об устойчивости, выгодности, справедливости по отношению к пользователям.

В связи с этим, особое значение приобретает применение теории принятия решений к оптимизации СМО при наличии многих критериев.

Рассмотрим марковскую систему массового обслуживания (СМО) с ожиданием, в которой параллельно функционируют  $m$  узлов (приборов). На вход системы поступают  $n$  простейших потоков заявок. Для каждого потока определена интенсивность  $\lambda_i$  ( $i=1,\dots,n$ ).

Будем считать, что требование каждого потока генерируется отдельным пользователем. Пользователь  $A_i$ , формирующий поток требований интенсивности  $\lambda_i$ , с вероятностью  $x_{ij}$

$$\left( 0 \leq x_{ij} \leq 1, \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \right)$$

направляет свои требования в очередь к  $j$ -му прибору.

На основании теоремы просеивания и объединения простейших потоков по полиномиальной схеме образуется  $m$  простейших потоков сообщений к обслуживающим приборам с интенсивностями:

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} \lambda_i, \quad j=1,\dots,m.$$

В качестве показателей эффективности распределения заявок по очередям выберем средние потери на ожидание  $i$ -го пользователя в единицу времени:

$$L_i(x_1, \dots, x_n) = \lambda_i \sum_{j=1}^m x_{ij} K_j v_j, \quad i=1, \dots, n,$$

где

$$v_j = \frac{\Lambda_j}{\mu_j(2\mu_j - \Lambda_j)}, \quad j=1, \dots, m$$

- среднее время ожидания в очереди у  $j$ -го прибора [2];

$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$  - вектор вероятностей распределения заявок  $i$ -го пользователя по  $m$  очередям;  $K_j$  - стоимость единицы времени ожидания заявки у  $j$ -го прибора;

$\mu_j$  - интенсивность обслуживания заявки на  $j$ -ом приборе.

Ставится задача: найти оптимальное распределение заявок  $\{x_{ij}\}$  для каждого пользователя в условиях конкуренции пользователей за средства обслуживания.

Так как пользователи формируют свои потоки независимо друг от друга и каждый стремиться минимизировать свое время ожидания, то задачу оптимизации можно сформулировать в виде бесскоалиционной игры  $n$  лиц [3]:

$$\Gamma = \left\langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{L_i\}_{i \in I} \right\rangle,$$

где  $I$  - множество игроков (пользователей),

$$X_i = \left\{ x_{ij} : x_{ij} \in [0,1], \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \right\}$$

- множество стратегий  $i$ -го игрока,

$L_i(x_1, \dots, x_n)$  - функция потерь  $i$ -го игрока,  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im}) \in X_i, i=1, \dots, n$ .

Одной из форм реализации представления об устойчивости можно считать понятие равновесия

сия. Решением поставленной задачи будет являться точка равновесия данной игры, то есть такая точка  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ , что для любых  $i \in I, x_i \in X_i$ :

$$\begin{aligned} L_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*) &\leq \\ &\leq L_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*), \end{aligned}$$

то есть любое отклонение игрока от этой стратегии ведет к увеличению его функции потерь.

Сформулируем задачу поиска ситуации равновесия в виде многокритериальной задачи нелинейного программирования:

$$\begin{cases} L_i(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min, i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Так как функции потерь

$$L_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

непрерывно дифференцируемы по каждой компоненте  $x_{ij}, j = 1, \dots, m$  вектора  $x_i \in X_i (i = 1, \dots, n)$ , то для нахождения ситуации равновесия, являющейся внутренней точкой множества стратегий, можно воспользоваться методом множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа для каждой задачи данной системы:

$$\begin{aligned} Z_i(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= L_i(x_1, \dots, x_n) - \beta_i \left( \sum_{j=1}^m x_{ij} - 1 \right), i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где  $\beta_i$  - множители Лагранжа.

Покажем выпуклость функции  $Z_i$ . Для этого вычислим второй дифференциал этой функции, который имеет следующий вид:

$$d_{x_i x_i}^2 Z_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_{ij} \partial x_{ik}} dx_{ij} dx_{ik}.$$

Находим

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x_{ij}} = \frac{\lambda_i K_j (\lambda_i x_{ij} \mu_j + \Lambda_j \mu_j - \Lambda_j^2)}{2 \mu_j (\mu_j - \Lambda_j)^2} - \beta_i.$$

Получим, что

$$\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_{ij} \partial x_{ik}} = 0, j \neq k,$$

и, наконец,

$$\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_{ij}^2} = \frac{\lambda_i^2 K_j}{(\mu_j - \Lambda_j)^3} (\mu_j - \Lambda_j + \lambda_i x_{ij}).$$

Так как система функционирует в стационар-

ном режиме, т.е.

$$\frac{\Lambda_j}{\mu_j} < 1,$$

то

$$\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_{ij}^2} > 0$$

для любого  $x_{ij} \in [0, 1]$ .

Таким образом, второй дифференциал функции  $Z_i$  по переменной  $x_i$  - положительно определенная квадратичная форма, так как для любого  $x_i \in X_i$  и любого ненулевого вектора  $dx_i$  размерности  $m$  выполнено неравенство:

$$d_{x_i x_i}^2 Z_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_{ij}^2} dx_{ij}^2 > 0$$

Следовательно, функция  $Z_i$  выпукла на множестве  $X_i$ , а ее минимум определяется из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{ij}} = 0, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; \\ \frac{\partial Z_i}{\partial \beta_i} = 0, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Для рассматриваемой СМО эти условия представляют собой систему нелинейных уравнений по переменным  $x_{ij}, \beta_i$ :

$$\begin{cases} \frac{K_j (\lambda_i x_{ij} \mu_j + \Lambda_j \mu_j - \Lambda_j^2)}{2 \mu_j (\mu_j - \Lambda_j)^2} = \frac{\beta_i}{\lambda_i}, \\ i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяет решение

$$x_{ij}^* = \frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^m \mu_j} (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m).$$

Подставив найденные значения  $x_{ij}^*$  в формулу для нахождения функции потерь в данной точке, получаем:

$$L_i(x_1^*, \dots, x_n^*) = \lambda_i \sum_{j=1}^m \frac{\frac{K_j \sum_{i=1}^n \lambda_i}{\sum_{k=1}^m \mu_k \left( \sum_{k=1}^m \mu_k - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)}}{\sum_{k=1}^m \mu_k},$$

$$i = 1, \dots, n$$

Теперь покажем Парето-оптимальность точки  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ , которая отражает свойства выгодно-

сти принимаемого решения.

Точка

$$x^* = \{x_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

множества  $X$  называется оптимальной по Парето, если из условий  $L(x) \leq L(x^*)$ ,  $x \in X$ , следует, что  $L(x) = L(x^*)$ .

Будем основываться на следующем утверждении [4].

Если для некоторых  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  и  $x^* \in X$  имеет место следующее равенство:

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(x^*),$$

то  $x^*$  - Парето-оптимальная точка.

Положим  $\alpha_i = \alpha > 0$  и рассмотрим функцию

$$L(x) = \sum_{i=1}^n \alpha L_i(x_1, \dots, x_n)$$

Представим  $L(x)$  в следующем виде:

$$L(x) = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \frac{x_{ij} K_j \Lambda_j}{2\mu_j(\mu_j - \Lambda_j)} + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( 1 - \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij} \right) \frac{K_m \Lambda_m}{2\mu_m(\mu_m - \Lambda_m)} \right\},$$

где

$$x_{im} = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij},$$

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} \lambda_i, j = 1, \dots, m-1$$

$$\Lambda_m = \sum_{i=1}^n \left( 1 - \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij} \right) \lambda_i$$

Так как объединение выпуклых функций дает в результате выпуклую функцию, то можно утверждать, что функция

$$L(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x)$$

является выпуклой на множестве  $X$  и ее минимум определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{kl}} = 0, \quad k = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_{kl}} &= \alpha \left\{ \frac{4\Lambda_l K_l \lambda_k \mu_l (\mu_l - \Lambda_l) + 2\Lambda_l^2 K_l \lambda_k \mu_l}{4\mu_l^2 (\mu_l - \Lambda_l)^2} \right\} + \\ &+ \alpha \left\{ -\frac{4\Lambda_m K_m \lambda_k \mu_m (\mu_m - \Lambda_m) + 2\Lambda_m^2 K_m \lambda_k \mu_m}{4\mu_m^2 (\mu_m - \Lambda_m)^2} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda_k}{2} \frac{K_l}{\mu_l} \left[ -1 + \frac{\mu_l^2}{(\mu_l - \Lambda_l)^2} \right] + \\ &+ \frac{\lambda_k}{2} \frac{K_m}{\mu_m} \left[ 1 - \frac{\mu_m^2}{(\mu_m - \Lambda_m)^2} \right], \\ &k = 1, \dots, n; l = 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

Предположим, что

$$\frac{K_l}{\mu_l} = \frac{K_m}{\mu_m} = \tau, \quad (l = 1, \dots, m-1).$$

Тогда можно записать:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{kl}} = \frac{\lambda_k \tau}{2} \left[ \frac{\mu_l^2}{(\mu_l - \Lambda_l)^2} - \frac{\mu_m^2}{(\mu_m - \Lambda_m)^2} \right] \quad (1)$$

Подставим найденное значение

$$x_{ij}^* = \frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^m \mu_j}, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m.$$

Введем обозначения:

$$\mu = \sum_{j=1}^m \mu_j, \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_j(x_{1j}^*, \dots, x_{mj}^*) &= \sum_{i=1}^n x_{ij}^* \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_j}{\mu} \lambda_i = \frac{\mu_j}{\mu} \lambda, \\ &j = 1, \dots, m-1; \\ \Lambda_m(x_{1m}^*, \dots, x_{mm}^*) &= \sum_{i=1}^n \left( 1 - \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}^* \right) \lambda_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\mu_j}{\mu} \lambda_i \right) \lambda_i = \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \lambda_i \right) \lambda_i = \\ &= \left\{ m \cdot \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j = \mu - \mu_m \right\} = \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\mu - \mu_m}{\mu} \right) \lambda_i = \\ &= \frac{\mu_m}{\mu} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{\lambda \mu_m}{\mu}. \end{aligned}$$

Подставим найденные выражения в систему (1) и получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{kl}} = \frac{\lambda_k \tau}{2} \left[ \frac{\mu_l^2}{(\mu_l - \frac{\mu_l}{\mu} \lambda)^2} - \frac{\mu_m^2}{(\mu_m - \frac{\mu_m}{\mu} \lambda)^2} \right] =$$

$$= \frac{\lambda_k \tau}{2} \left[ \frac{1}{(1 - \frac{\lambda}{\mu})^2} - \frac{1}{(1 - \frac{\lambda}{\mu})^2} \right] = 0 \\ (k=1,..,n ; l=1,..,m-1).$$

Таким образом, точка:

$$x_{ij}^* = \frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^m \mu_j} \quad (i=1,..,n ; j=1,..,m)$$

является корнем системы и, следовательно, Парето-оптимальной точкой при условии, что

$$\frac{K_j}{\mu_j} = \frac{K_m}{\mu_m}, j = 1,..,m-1$$

Одним из простейших представлений о справедливости в бескоалиционной игре  $n$  лиц является равенство функций потерь игроков в ситуации равновесия. Для рассматриваемой СМО это эквивалентно равенству интенсивностей  $\lambda_i$  входных потоков ( $i \in I$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов В.К., Долганов А.В. Основы теории информационных сетей. М: Высшая школа, 1987. – 271 с.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М: Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. Воробьев Н.Н. Теория игр. М: Наука, 1985. – 272 с.
4. Виллас Э.И. Оптимальность в играх и решениях. М: Наука, 1990. – 256 с.

□ Авторы статьи:

Чекменев Владимир Алексеевич – канд. техн. наук, доц. каф. автомобильных перевозок	Калинина Мария Петровна – асп. каф. автоматизации исследований и технической кибернетики КемГУ
---	---

УДК 519.872.3

В.А. Чекменев, М.С. Антропов

## АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПО ЧИСЛУ ТРЕБОВАНИЙ ПРИОРИТЕТАМИ ПРИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКЕ

Анализ систем массового обслуживания (СМО) с динамическими приоритетами является задачей достаточно сложной. Для её решения в условиях большой загрузки целесообразно использовать асимптотические методы, то есть заменять исходный процесс функционирования СМО другим асимптотически эквивалентным процессом. Можно исследовать такие системы используя точные методы. Например, в [2] было получено решение через производящую функцию, но лишь для системы с двумя входными потоками. Для большего количества потоков получить решение не представляется возможным из-за громоздкости получающихся выражений. Так же у решений через производящую функцию имеется еще один недостаток: можно найти математическое ожидание только от функций определенного вида ( $F(i,j)=A_i^n + B_j^n$ ). В свете всего вышесказанного использование асимптотических методов для исследования СМО с динамическими приоритетами при большой загрузке наиболее приемлемо.

Пусть имеется однолинейная СМО с динамическим приоритетом, на вход которой поступают

три простейших потока требований с параметрами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Распределение времени обслуживания экспоненциальное с интенсивностью  $\mu$ . Будем предполагать, что  $\rho < 1$ , где  $\rho = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu}$  – загрузка системы, причем  $\rho \uparrow 1$  (условие большой загрузки).

Состояние системы зададим вектором  $(i_1, i_2, i_3)$ , где  $i_1$  – число требований первого типа, стоящих в очереди,  $i_2$  – второго типа,  $i_3$  – третьего.

Правило выбора требования на прибор в момент окончания обслуживания в состоянии  $(i_1, i_2, i_3)$  определяется величинами  $\delta_s(i_1, i_2, i_3)$ ,  $s=1,2,3$ , где

$$\delta_s = \begin{cases} 1, & i_l \neq s < i_s \quad l = \overline{1,3} \\ 0, & \end{cases} .$$

Рассмотрим процесс изменения во времени состояний СМО  $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$  и его асимптотическую аппроксимацию процессом

$$\{x_1(t) = \varepsilon \cdot i_1(t), x_2(t) = \varepsilon \cdot i_2(t), x_3(t) = \varepsilon \cdot i_3(t)\},$$