

$$= \frac{\lambda_k \tau}{2} \left[\frac{1}{(1 - \frac{\lambda}{\mu})^2} - \frac{1}{(1 - \frac{\lambda}{\mu})^2} \right] = 0 \\ (k=1,..,n ; l=1,..,m-1).$$

Таким образом, точка:

$$x_{ij}^* = \frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^m \mu_j} \quad (i=1,..,n ; j=1,..,m)$$

является корнем системы и, следовательно, Парето-оптимальной точкой при условии, что

$$\frac{K_j}{\mu_j} = \frac{K_m}{\mu_m}, \quad j = 1,..,m-1$$

Одним из простейших представлений о справедливости в бескоалиционной игре n лиц является равенство функций потерь игроков в ситуации равновесия. Для рассматриваемой СМО это эквивалентно равенству интенсивностей λ_i входных потоков ($i \in I$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов В.К., Долганов А.В. Основы теории информационных сетей. М: Высшая школа, 1987. – 271 с.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М: Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. Воробьев Н.Н. Теория игр. М: Наука, 1985. – 272 с.
4. Виллас Э.И. Оптимальность в играх и решениях. М: Наука, 1990. – 256 с.

□ Авторы статьи:

Чекменев Владимир Алексеевич – канд. техн. наук, доц. каф. автомобильных перевозок	Калинина Мария Петровна – асп. каф. автоматизации исследований и технической кибернетики КемГУ
---	---

УДК 519.872.3

В.А. Чекменев, М.С. Антропов

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПО ЧИСЛУ ТРЕБОВАНИЙ ПРИОРИТЕТАМИ ПРИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКЕ

Анализ систем массового обслуживания (СМО) с динамическими приоритетами является задачей достаточно сложной. Для её решения в условиях большой загрузки целесообразно использовать асимптотические методы, то есть заменять исходный процесс функционирования СМО другим асимптотически эквивалентным процессом. Можно исследовать такие системы используя точные методы. Например, в [2] было получено решение через производящую функцию, но лишь для системы с двумя входными потоками. Для большего количества потоков получить решение не представляется возможным из-за громоздкости получающихся выражений. Так же у решений через производящую функцию имеется еще один недостаток: можно найти математическое ожидание только от функций определенного вида ($F(i,j)=A_i^n + B_j^n$). В свете всего вышесказанного использование асимптотических методов для исследования СМО с динамическими приоритетами при большой загрузке наиболее приемлемо.

Пусть имеется однолинейная СМО с динамическим приоритетом, на вход которой поступают

три простейших потока требований с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Распределение времени обслуживания экспоненциальное с интенсивностью μ . Будем предполагать, что $\rho < 1$, где $\rho = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu}$ – загрузка системы, причем $\rho \uparrow 1$ (условие большой загрузки).

Состояние системы зададим вектором (i_1, i_2, i_3) , где i_1 – число требований первого типа, стоящих в очереди, i_2 – второго типа, i_3 – третьего.

Правило выбора требования на прибор в момент окончания обслуживания в состоянии (i_1, i_2, i_3) определяется величинами $\delta_s(i_1, i_2, i_3)$, $s=1,2,3$, где

$$\delta_s = \begin{cases} 1, & i_l \neq s < i_s \quad l = \overline{1,3} \\ 0, & \end{cases} .$$

Рассмотрим процесс изменения во времени состояний СМО $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$ и его асимптотическую аппроксимацию процессом

$$\{x_1(t) = \varepsilon \cdot i_1(t), x_2(t) = \varepsilon \cdot i_2(t), x_3(t) = \varepsilon \cdot i_3(t)\},$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ - малый параметр. Обозначая через $P(i_1, i_2, i_3)$ финальную вероятность того, что в очередях будет i_k требований соответствующего типа, получим следующие уравнения Колмогорова:

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu)P(i_1, i_2, i_3) = \\ & = \lambda_1 P(i_1 - 1, i_2, i_3) + \lambda_2 P(i_1, i_2 - 1, i_3) + \\ & + \lambda_3 P(i_1, i_2, i_3 - 1) + \mu P(i_1 + 1, i_2, i_3) \times \\ & \times \delta_1(i_1 + 1, i_2, i_3) + \mu P(i_1, i_2 + 1, i_3) \times \\ & \times \delta_2(i_1, i_2 + 1, i_3) + \\ & + \mu P(i_1, i_2, i_3 + 1) \delta_3(i_1, i_2, i_3 + 1). \end{aligned}$$

Подобно [1] переходя от (i_1, i_2, i_3) к $x_1 = \varepsilon \cdot i_1, x_2 = \varepsilon \cdot i_2, x_3 = \varepsilon \cdot i_3$ при достаточно малых ε , получим

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu)P\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) = \\ & = \lambda_1 P\left(\frac{x_1 - \varepsilon}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) + \lambda_2 P\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2 - \varepsilon}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) + \\ & + \lambda_3 P\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3 - \varepsilon}{\varepsilon}\right) + \mu P\left(\frac{x_1 + \varepsilon}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) \times \\ & \times \delta_1\left(\frac{x_1 + \varepsilon}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) + \mu P\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2 + \varepsilon}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) \times \\ & \times \delta_2\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2 + \varepsilon}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) + \mu P\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3 + \varepsilon}{\varepsilon}\right) \times \\ & \times \delta_3\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3 + \varepsilon}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Предполагая, что в условиях большой загрузки выполняется соотношение

$$P\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) \rightarrow \gamma(\varepsilon)p(x_1, x_2, x_3),$$

где через $p(x_1, x_2, x_3)$ - асимптотическая плотность вероятностей состояний, ($\gamma(\varepsilon)$ - нормирующий множитель), получим определяющее ее уравнение

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu)p(x_1, x_2, x_3) = \\ & = \lambda_1 p(x_1 - \varepsilon, x_2, x_3) + \lambda_2 p(x_1, x_2 - \varepsilon, x_3) + \\ & + \lambda_3 p(x_1, x_2, x_3 - \varepsilon) + \mu p(x_1 + \varepsilon, x_2, x_3) \times \\ & \times \delta_1(x_1 + \varepsilon, x_2, x_3) + \mu p(x_1, x_2 + \varepsilon, x_3) \times \\ & \times \delta_2(x_1, x_2 + \varepsilon, x_3) + \mu p(x_1, x_2, x_3 + \varepsilon) \times \\ & \times \delta_3(x_1, x_2, x_3 + \varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$\delta_s = \begin{cases} 1, & x_l \neq s < x_s \quad l = \overline{1,3} \\ 0, & s = \overline{1,3} \end{cases}$$

Далее, используя разложение в ряд с точно-

стью до членов порядка ε^2 , перейдем к дифференциальным уравнениям в частных производных

$$\sum_{l=1}^3 \left[\frac{\varepsilon^2}{2} (\lambda_l + \mu \delta_l) \frac{\partial^2 p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_l^2} + \right. \\ \left. + \varepsilon (\mu \delta_l - \lambda_l) \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_l} \right] = 0 \quad (1)$$

с нулевыми граничными условиями.

Управление разбивает пространство состояний на три непересекающиеся области -

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) : \delta_s(x_1, x_2, x_3) = 1, \\ \delta_l \neq s(x_1, x_2, x_3) = 0, l = \overline{1,3} \end{array} \right\} s = \overline{1,3},$$

для решения (1) в каждой из областей перейдем к новым переменным

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 x_i, \quad t_s = \frac{x_s - \varphi/3}{\varepsilon}$$

и получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 \pi_s}{\partial t_s^2} + \frac{3(\mu - \lambda_s)}{(\mu + \lambda_s)} \frac{\partial \pi_s}{\partial t_s} = 0 \quad s = \overline{1,3} ..$$

При решении этих уравнений используем два условия:

a) равенство плотностей на границе изменения управления, то есть при $t_s = 0$;

b) граничные условия

$$\lim_{t_s \rightarrow 0} \pi_s = 0$$

и получим:

$$\pi_s = c(\varphi) e^{-\alpha_s t_s},$$

где

$$\alpha_s = \frac{3(\mu - \lambda_s)}{(\mu + \lambda_s)}.$$

Для нахождения $c(\varphi)$ сделаем обратный переход к переменным (x_1, x_2, x_3) и воспользуемся условием:

$$\begin{aligned} & \iint p(\varphi - x_2 - x_3, x_2, x_3) dx_2 dx_3 + \\ & S_1 \\ & + \iint p(x_1, \varphi - x_1 - x_3, x_3) dx_1 dx_3 + \\ & S_2 \\ & + \iint p(x_1, x_2, \varphi - x_1 - x_2) dx_1 dx_2 = e^{-\varphi}. \end{aligned}$$

Здесь слева плотность распределения суммы компонент неотрицательной случайной величины с плотностью $p(x_1, x_2, x_3)$ (здесь S_k - проекция части плоскости $\varphi = x_1 + x_2 + x_3$, где $\delta_k = 1$, на плоскость $x_k = 0$), а справа - плотность вероятностей состояний одномерного марковского про-

цесса $\{\varepsilon i_1(t) + \varepsilon i_2(t) + \varepsilon i_3(t)\}$ (получено на основе незавершенной работы [4]). Вычисляя интегралы в левой части получим:

$$c(\varphi)\varepsilon^2 \left[\frac{1}{\alpha_1^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha_1 \varphi}{3\varepsilon}} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_2^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha_2 \varphi}{3\varepsilon}} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_3^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha_3 \varphi}{3\varepsilon}} \right)^2 \right] = e^{-\varphi}$$

Заметим, что при малых ε вне окрестности точки $(0,0,0)$ без потери принятой точности $c(\varphi)$ можно считать равной

$$c(\varphi) = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{(\alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2) \varepsilon^2} e^{-\varphi}.$$

Тогда окончательно плотность распределения будет иметь следующий вид:

$$P(x_1, x_2, x_3) = \gamma(\varepsilon) \begin{cases} c(\varphi) \exp\left\{-\alpha_1 \frac{x_1 - \varphi/3}{\varepsilon}\right\} & x_1 > x_2, \quad x_1 > x_3 \\ c(\varphi) \exp\left\{-\alpha_2 \frac{x_2 - \varphi/3}{\varepsilon}\right\} & x_2 > x_1, \quad x_2 > x_3 \\ c(\varphi) \exp\left\{-\alpha_3 \frac{x_3 - \varphi/3}{\varepsilon}\right\} & x_3 > x_2, \quad x_3 > x_1 \end{cases}$$

где $\gamma(\varepsilon)$ - нормирующий множитель, вычисляемый из условия нормировки.

Получив плотность распределения аппроксимирующего процесса, можно вычислить все характеристики исходной системы.

Для определения области применения полученной асимптотической плотности, для двухмерного случая, при вычислении математического ожидания суммы длин очередей, проводилось сравнение с результатами полученными в работе [2]. При загрузке $\rho=0.6$ значение математического ожидания суммы длин очередей вычисленное по асимптотическим формулам отличалось от значения вычисленного по формулам из [2] на ~ 0.4 , при $\rho=0.7$ отличалось на ~ 0.31 , при $\rho=0.8$ - на ~ 0.2 .

Вывод: При загрузке $\rho>0.8$ асимптотические формулы дают близкие результаты к формулам полученным точными методами для двухмерного случая. Для трехмерного случая точные формулы получить не удается, в связи со сложностью возникающих уравнений, но при большой загрузке ($\rho>0.8$) можно применять асимптотические формулы, которые имеют достаточную точность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаров А.А. Чекменев В.А. Анализ и оптимизация системы массового обслуживания с динамическими по числу требований приоритетами при большой загрузке // Автоматика и телемеханика. 1984. №10. 78-87.
2. Назаров А.А. Терпугов А.Ф. Дисциплина обслуживания с выбором из большой очереди // Техническая кибернетика. 1975. №2. 103-105.
3. Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизуемых систем. Томск: Издательство Томского университета, 1991. –160с.
4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. –432 с.

□ Авторы статьи:

Чекменев
Владимир Алексеевич
– канд. техн. наук,
доц. каф. автомобильных перевозок

Антропов
Максим Сергеевич
– аспирант