

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 622.241.54

Н. В. Черданцев, В. А. Шаламанов

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Задача распределения напряжений в окрестностях горных выработок и их сопряжений является важной в механике подземных сооружений, поскольку позволяет при использовании критериев разрушения материала определять зоны нарушения сплошности и, следовательно, нагрузку на крепь. Подобные задачи для одиночных протяжённых горных выработок решались в ряде работ [1, 3, 5]. В этих работах для определения напряжённого состояния вокруг выработок квадратного, трапециевидного, сводчатого сечений использовался метод функций комплексного переменного.

Однако, если необходимо определять напряжённое состояние вокруг камерных выработок, размеры которых по направлениям осей пространственной системы координат соизмеримы друг с другом, или сопряжений выработок, то в этих случаях нужно использовать другие методы, так как такие задачи являются пространственными задачами теории упругости, а методы функций комплексного переменного, детально разработанные в [8], применимы лишь к плоским задачам. Пространственные задачи решаются, например, методом конечных элементов. Однако, для бесконечных областей, т. е. для тел с бесконечно большими размерами, более эффективным является метод граничных интегральных уравнений [2, 6, 7]. Сущность метода заключается в следующем. К контуру полости прикладывается компенсирующая нагрузка некоторой интенсивностью $\tilde{a}$. Совместно с внешней нагрузкой компенсирующая нагрузка в каждой точке контура должна удовлетворять условию на поверхности. Это позволяет составить интегральное уравнение, которое по структуре идентично интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

В теории упругости задача определения напряжений вокруг произвольной полости, находящейся внутри упругого нагруженного пространства, называется второй внешней краевой задачей [6].

Задача о напряжённом состоянии вокруг выработок и сопряжений выработок формулируется следующим образом: вертикально вдоль координатной оси z на бесконечный упругий массив дей-

ствуют напряжения $\sigma_z^\infty = \gamma H$, горизонтально вдоль осей x, y действуют напряжения $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \lambda \gamma H$, где λ - коэффициент бокового давления. Внутри массива имеется полость произвольных размеров и формы, имитирующая заданную выработку. На всей поверхности выработки или какой-то её части изнутри приложены напряжения F , которые могут создаваться, например, реакцией крепи. Требуется найти напряжённое состояние в любой точке массива вокруг выработки.

Интегральное уравнение второй краевой задачи [6]

$$\frac{1}{2} a_q(Q_0) - \iint_O \Phi_{qm}(Q_0, M_0) a_m(M_0) dO_{M_0} = n_q(Q_0) \sigma_{qq}^\infty - F_q(Q_0). \quad (1)$$

В уравнении (1) $\Phi_{qm}(Q_0, M_0)$ - тензор Грина, т. е. единичное решение на поверхности полости, определяется [6, 2, 7]

$$\Phi_{qm}(Q_0, M_0) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^2} \times \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{x_q n_m}{R} - \frac{n_q x_m}{R} \right) + \left[(1-2\nu) \delta_{qm} + 3 \frac{x_q x_m}{R^2} \right] \frac{n_t x_t}{R} \right\}. \quad (2)$$

Здесь ν - коэффициент Пуассона, индексы $q, m, t = 1, 2, 3$ - номера координатных осей (ось 1 - x , ось 2 - y , ось 3 - ось z), R - расстояние между точками Q_0 и M_0 , δ_{qm} - символ Кронекера, δ_{qq}^∞ - тензор напряжений на бесконечности, O - площадь поверхности полости, n_q, n_m - единичные векторы внешних к поверхности полости нормалей в точках Q_0, M_0 (рис. 1).

Уравнение (1) решается относительно неизвестного вектора $\tilde{a}$, который называют вектором компенсирующей нагрузки или вектором фиктивной нагрузки. Решение уравнения (1) ищется в форме метода Крылова - Боголюбова [4, 7]: инте-

грал заменяется суммой

$$\frac{1}{2}a_{q,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Phi_{qm,ij} a_{m,j} \Delta O_j = n_{q,i} \sigma_{qq,i}^{\infty} - F_{q,i}. \quad (3)$$

где i - номер точки на поверхности полости, в которой формулируется граничное условие; j - номер текущей точки на поверхности полости.

Поскольку уравнение (1) сингулярно, то в (3) суммирование ведется по всем точкам, кроме $j=i$. Интегрирование (3) по каждому i -му элементу при условии, что в пределах элемента F , a постоянны, приводит к N векторным уравнениям:

$$\frac{1}{2}a_{q,i} \Delta O_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Phi_{qm,ij} a_{m,j} \Delta O_j \Delta O_i = \quad (4)$$

$$= n_{q,i} \sigma_{qq,i}^{\infty} \Delta O_i - F_{q,i} \Delta O_i.$$

Обозначим

$$a_{q,i} \Delta O_i = a_{q,i}^*, \quad a_{m,ji} \Delta O_j = a_{m,j}^*,$$

$$\sigma_{qq,i}^{\infty} \Delta O_i = t_{q,i}^{\infty}, \quad F_{q,i} \Delta O_i = F_{q,i}^*. \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}a_{q,i}^* - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Phi_{qm,ij} a_{m,j}^* \Delta O_i = n_{q,i} t_{q,i}^{\infty} - F_{q,i}^*. \quad (6)$$

N векторным уравнениям (6) соответствуют $3N$ скалярных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} a_{x,i}^* - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\Phi_{xx,ij} a_{x,j}^* + \Phi_{xy,ij} a_{y,j}^* + \Phi_{xz,ij} a_{z,j}^* \right) \Delta O_i &= n_{x,i} t_x^{\infty} - F_{x,i}^*, \\ a_{y,i}^* - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\Phi_{yx,ij} a_{x,j}^* + \Phi_{yy,ij} a_{y,j}^* + \Phi_{yz,ij} a_{z,j}^* \right) \Delta O_i &= n_{y,i} t_y^{\infty} - F_{y,i}^*, \\ a_{z,i}^* - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\Phi_{zx,ij} a_{x,j}^* + \Phi_{zy,ij} a_{y,j}^* + \Phi_{zz,ij} a_{z,j}^* \right) \Delta O_i &= n_{z,i} t_z^{\infty} - F_{z,i}^* \end{aligned} \right. \quad (7)$$

После решения (7) относительно $a_{x,j}^*, a_{y,j}^*, a_{z,j}^*$ можно определить тензор на-

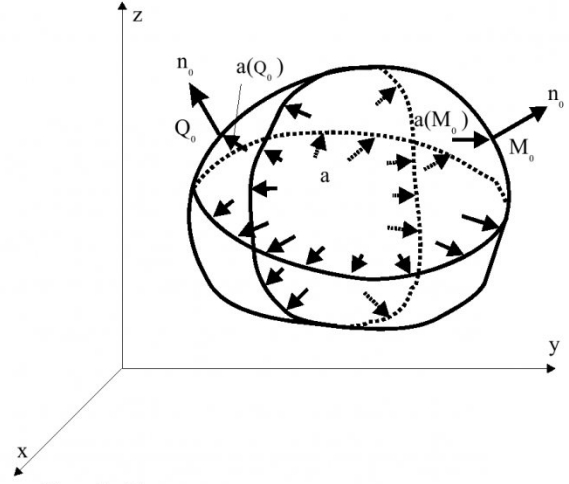


Рис. 1. Полость с основными параметрами

пряжений σ_{qm} в произвольной точке i массива, используя принцип суперпозиции:

$$\sigma_{qm,i} = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^3 \sigma_{qmt,ij} a_{t,j} + \sigma_{qq,i}^{\infty}. \quad (8)$$

Здесь σ_{qmt} - единичный тензор напряжений Кельвина [2, 6, 9]

$$\sigma_{qmt} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^3} \left[(1-2\nu)(\delta_{mt}x_q + \delta_{qt}x_m - \delta_{qm}x_t) + \frac{3x_qx_mx_t}{R^2} \right]. \quad (9)$$

В плоской задаче теории упругости напряжённое состояние определяется координатами плоскости, например, xOy . Если ось протяжённой горной выработки обозначить x , то любая плоскость единичной толщины, перпендикулярная оси x , работает в условиях плоской деформации. В этом случае граничное интегральное уравнение (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_q(Q_0) - \int_L \Phi_{qm}(Q_0, M_0) a_m(M_0) dL_{M_0} &= \\ &= n_q(Q_0) \sigma_{qq}^{\infty} - F_q(Q_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь интегрирование ведётся вдоль линии контура отверстия (контура сечения горной выработки), а тензор Φ_{qm} получается из тензора (2) интегрированием по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$

$$\begin{aligned} \Phi_{qm}^*(Q_0, M_0) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \times \\ &\times \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{x_q n_m}{r} - \frac{n_q x_m}{r} \right) + \right. \\ &\left. + \left[(1-2\nu) \delta_{qm} + 2 \frac{x_q x_m}{R^2} \right] \frac{n_t x_t}{r} \right\} \dots \end{aligned}$$

где r - расстояние между точками Q_0 и M_0 , $q, m, t = 1, 2$. (11)

Заменяя в (10) интеграл суммой, затем интегрируя по каждому участку длиной ΔL_i , в пределах которого $a_i = \text{const}$, приходим к $2N$ алгебраическим уравнениям относительно $a_{y,j}^*$, $a_{z,j}^*$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} a_{y,i}^* - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\Phi_{yx,ij}^* a_{y,j}^* + \Phi_{yz,ij}^* a_{z,j}^*) \Delta L_i = \\ = n_{y,i} t_{y,i}^\infty - F_{y,i}^*, \\ \frac{1}{2} a_{z,i}^* - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\Phi_{zy,ij}^* a_{y,j}^* + \Phi_{zz,ij}^* a_{z,j}^*) \Delta L_i = \\ = n_{z,i} t_{y,i}^\infty - F_{z,i}^*. \end{cases} \quad (12)$$

Напряжения в произвольной точке плоскости определяется по формуле, аналогичной (8):

$$\sigma_{qmt,i} = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^3 \sigma_{qmt,ij}^* a_{t,j} + \sigma_{qq,i}^\infty. \quad (13)$$

В выражении (13) тензор Кельвина σ_{qmt}^* определяется по формуле [2, 9]

$$\sigma_{qmt}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{mt}x_q + \delta_{qt}x_m - \delta_{qm}x_t) + \frac{2x_qx_mx_t}{r^2} \right]. \quad (14)$$

После нахождения напряжений можно, используя критерии прочности, строить области разрушения так называемые зоны нарушения сплошности (З. Н. С.) материала вокруг выработки.

Ниже приводятся результаты расчётов зон нарушения сплошности вокруг наиболее часто встречающихся форм отверстий: круглой, квадратной, эллиптической трапецевидной и сводчатой форм, находящихся в условиях плоского деформированного состояния, т. е. решается плоская задача и напряжения в плоскости y, z , в которой находится рассматриваемое отверстие определяются по формулам (13), а напряжение σ_x , параллельное оси выработки x , связано с σ_y, σ_z

$$\sigma_x = \lambda \gamma H + \nu(\sigma_y + \sigma_z). \quad (15)$$

Массив горных пород, в котором проходит выработка, считается слоистым, т. е. состоящим из пластов основной породы и межпластовых прослоек. Прослойки называются плоскостями ослабления, поскольку материал на этих плоскостях имеет более низкие характеристики прочности, чем материал основной породы. Здесь для опре-

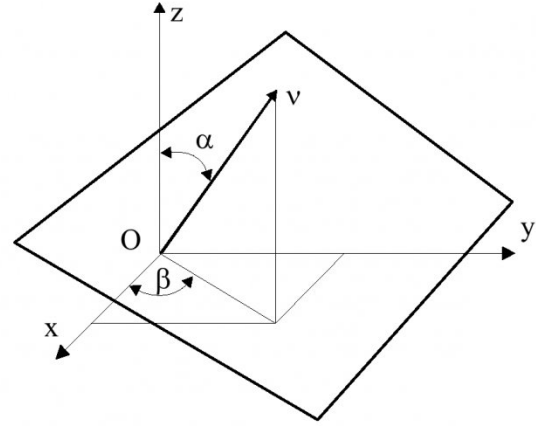


Рис. 2. Положение поверхности ослабления в пространстве

деления З. Н. С. используется критерий прочности Мора для материала поверхности ослабления (такой подход в [1, 3, 5] называется методом упругого наложения).

Поверхность ослабления (рис. 2) может быть произвольно ориентирована в пространстве. В статье и [3] это положение задаётся углами α, β , которые образует нормаль к этой поверхности с осями z, x .

Нормальные, касательные и полные напряжения по поверхности ослабления в случае плоской деформации определяются по известным формулам теории упругости [3,6].

Нормальные напряжения

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} lm, \quad (16)$$

здесь l, m, n - косинусы углов между нормалью к площадке и координатными осями x, y, z :

$$\begin{aligned} l &= \cos(v, x) = \sin \alpha \cos \beta, \\ m &= \cos(v, y) = \sin \alpha \sin \beta, \\ n &= \cos(v, z) = \cos \alpha, \end{aligned} \quad (17)$$

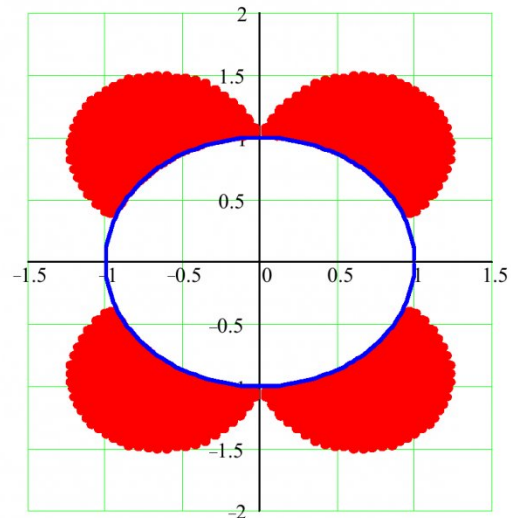


Рис. 3. Зоны нарушения сплошности вокруг круглого отверстия $\lambda=1, \alpha=0, \beta=90^\circ$

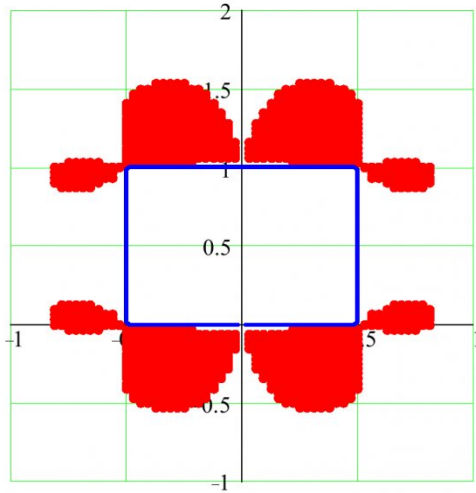


Рис. 4. Зоны нарушения сплошности вокруг квадратного отверстия $\lambda=1, \alpha=0, \beta=90^\circ$

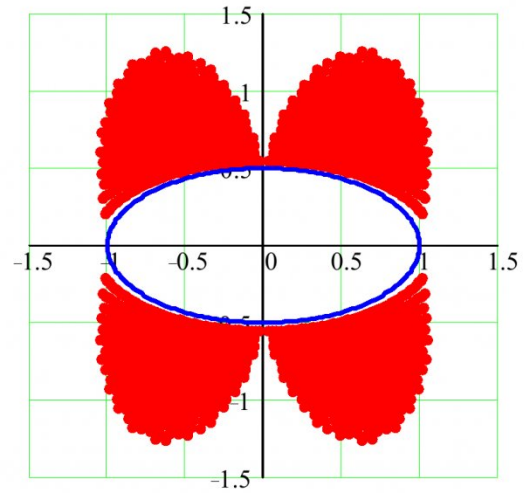


Рис. 5. Зоны нарушения сплошности вокруг эллиптического отверстия. Отношение большой оси к малой равно 2. $\lambda=1, \alpha=0, \beta=90^\circ$

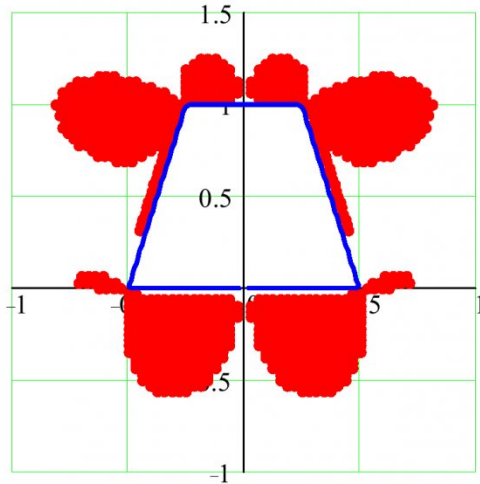


Рис. 6. Зоны нарушения сплошности вокруг трапециевидного отверстия. Отношение большого основания к малому равно 2, отношение большого основания к высоте равно 1. $\lambda=1, \alpha=0, \beta=90^\circ$

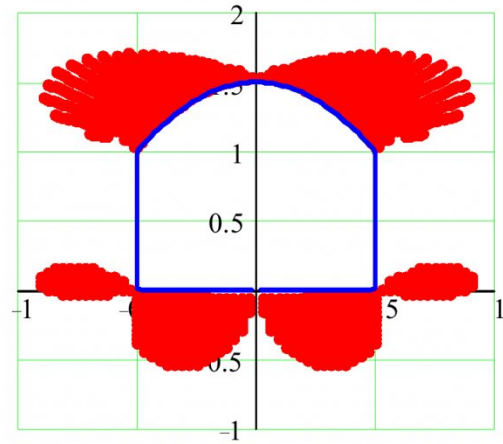


Рис. 7. Зоны нарушения сплошности вокруг сводчатого отверстия, свод очерчен параболой. Отношение высоты свода к основанию равно 1/2, отношение основания к высоте равно 1. $\lambda=1, \alpha=0, \beta=90^\circ$

полные напряжения

$$p_V^2 = (\sigma_x l)^2 + (\sigma_y m + \tau_{yz} n)^2 + (\tau_{yz} m + \sigma_z n)^2 \quad (18)$$

касательные напряжения

$$\tau_V = \sqrt{p_V^2 - \sigma_V^2} \quad (19)$$

Критерий прочности Мора задаётся прямолинейной огибающей кругов предельных состояний:

$$\tau_{np} = \sigma_V n + a_0 \quad (20)$$

В (19) a_0 - коэффициент сцепления, как и в [1, 3], а $n = \operatorname{tg}(\varphi)$ (φ - угол внутреннего трения).

Для решения задачи применялся пакет MathCad. На рис. 3 - 7 показаны различные формы по-

перечных сечений выработок и соответствующие им зоны нарушения сплошности в виде заштрихованных областей вокруг отверстий. Рассматривался массив с горизонтальными поверхностями ослабления ($\alpha=0, \beta=90^\circ$). Коэффициент бокового давления $\lambda=1$, характеристики прочности материала - $a_0=0, n=\operatorname{tg}20^\circ=0,364$. Напряжения даны в безразмерных единицах, отнесённых к γH . Размеры отверстий - в относительных величинах.

Полученные результаты совпадают с результатами, полученными другими методами [1, 3, 5]

Методом граничных интегральных уравнений рассмотрены и объёмные задачи о распределении напряжений вокруг трёхмерных полостей (с цилиндрической, сферической и призматической

полостями).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баклашов И. В., Картозия Б. А. Механика подземных сооружений и конструкции крепей. М.: Недра. - 1992. - 544.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. - М.: Мир. - 1987. - 525 с.
3. Ержанов Ж. С., Изаксон В. Ю., Станкус В. М. Комбайновые выработки шахт Кузбасса. Опыт поддержания и расчёт устойчивости. Кемерово, 1976. 216 с.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. Изд. 5-е. - М., Л.: Физматгиз. - 1962. - 708 с.
5. Колоколов С. Б. Механизм формирования зон нарушения сплошности вокруг подготовительных выработок и их воздействие на поддерживающую крепь. Докторская диссертация. Караганда, 1991, 270 с.
6. Лурье А. И. Теория упругости. - М.: Наука. - 1970. - 940 с.
7. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. Под ред. Т. Круза и Ф. Риццо. - М.: Мир. - 1978. - 210 с.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. - 1966. - 708.
9. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела. - М.: Наука. - 1979. - 683 с.

□ Авторы статьи:

Черданцев
Николай Васильевич
- канд. техн. наук, докторант каф.
строительства подземных сооруже-
ний и шахт

Шаламанов
Виктор Александрович
- докт. техн. наук, проф. каф.
строительства подземных сооруже-
ний и шахт