

УДК519.21

А. В. Бирюков

ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ

Полигональную диаграмму образует разбиение плоскости случайными прямыми на выпуклые полигоны. При этом исключается наличие параллельных прямых и пересечение более двух прямых в одной точке, т.е. случаи с нулевой вероятностью.

Если A и B – соответственно число разбивающих плоскость прямых и число образованных полигонов, то

$$B = (A^2 + A + 2) / 2.$$

Очевидно, что на каждой прямой число вершин и ребер полигонов равно $A-1$. Поэтому суммарное количество вершин диаграммы равно

$$C = A(A-1) / 2,$$

а суммарное число ребер

$$D = A(A-1) = 2C.$$

У случайно выбранного полигона число вершин N случайно со средним значением M и законом распределения

$$P(N) = 4 / 2^N, N \geq 3,$$

где $P(N)$ – вероятность встречи N – вершинного полигона.

Поскольку каждая вершина является общей для четырех полигонов, то среднее число вершин у одного полигона равно отношению $4C/B$ или

$$M = 4A(A-1) / (A^2 + A + 2).$$

Отсюда следует, что у бесконечной диаграммы ($A \rightarrow \infty$) среднее число вершин полигона равно 4.

Взаимное расположение полигонов на диаграмме обладает неопределенностью или хаосом. Количественной оценкой этого хаоса служит энтропия закона распределения случайной величины $N > 0$.

Подставляя сюда значения вероятностей, получим:

□ Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт.техн.наук, проф., зав. каф.
высшей математики

$$H = \sum_{N=3}^{\infty} N \frac{4}{2^N} - 2 \sum_{N=3}^{\infty} \frac{4}{2^N}$$

Первая из этих сумм по определению равна M , а вторая – единице (в силу свойства закона распределения). Следовательно, энтропия бесконечной диаграммы равна

$$H = M - 2 = 2.$$

Полигональную диаграмму можно рассматривать как граф, у которого вершинами и ребрами являются вершины и ребра полигонов. Алгоритмическую сложность описания этого графа определим следующим образом.

Рассмотрим у данного графа все его подграфы третьего порядка. Для конечной диаграммы число таких подграфов равно числу сочетаний из C по три, т.е.

$$E = C(C-1)(C-2) / 6.$$

Вводя здесь переменную A , получим многочлен шестой степени от этой переменной:

$$E = [A^3(A-1)^3 - 6A^2(A-1)^2 + 8A(A-1)] / 48.$$

Среди множества подграфов третьего порядка различными являются лишь четыре подграфа: цикл, цепь, ребро и вершина, три попарно несмежных вершины.

Обозначим число этих подграфов соответственно через F_1, F_2, F_3, F_4 . Тогда относительные частоты

$$Q_i = F_i / E, i = 1, 2, 3, 4$$

дают вероятностное распределение с энтропией

$$H = \sum Q_i L(1/Q_i).$$

Так как среди всех полигонов доля циклов (треугольников) равна $P(3) = 1/2$, то число всех циклов равно $B/2$ и, следовательно,

$$F_1 = (A^2 + A + 2) / 4.$$

Число цепей на разбивающих прямых равно $A(A-3)$. К ним добавляются цепи на полигонах с $N \geq 4$ вершинами. Поэтому общее количество цепей

$$F_2 = MB - 1,5B + A(A-3)$$

или в выражении через переменную A

$$F_2 = (9A^2 - 23A - 6) / 4.$$

Каждому ребру соответствует $C-8$ вершин, которые несмежны с концами ребра. Отсюда следует, что

$$F_3 = D(C-8) = 2C(C-8)$$

или в выражении через A

$$F_3 = A(A-1)(A^2 - A - 16) / 2.$$

Наконец, непосредственно находим, что

$$F_4 = (C-5)^3 / 6 = (A^2 - A - 10)^3 / 48.$$

Таким образом, получены пять многочленов от переменного количества прямых диаграммы: F_1, F_2 – второй степени, F_3 – четвертой степени, F_4 и E – шестой степени с одинаковыми коэффициентами при старших степенях. Отсюда следует, что с увеличением числа прямых вероятность $Q_4 = F_4/E$ асимптотически стремится к единице, а остальные вероятности – к нулю. Поэтому граф на бесконечной диаграмме имеет нулевую энтропию. Это свойство присуще всем разреженным графикам, т.е., у которых число вершин и число ребер связаны линейной зависимостью. О характере поведения энтропии можно судить по следующему небольшому фрагменту вычислений:

A)	5	10	15
H)	1,76	0,82	0,14