

УДК 622.807.2

Ю. И. Липин

## СРАВНЕНИЕ ОЦЕНОК МАЛЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ «ОПАСНЫХ» СОБЫТИЙ

Прогнозирование вспышек метана – важная составляющая в охране труда шахтеров. Оно учитывает влияние как детерминированной, так и случайной составляющей входных факторов на функцию отклика и отвечает на вопрос о возможности вспышки метана в виде рассчитанной вероятности вспышки

$$P(B) = P(M) \times P(I),$$

где  $P(M)$  – вероятность наличия взрывоопасной концентрации метана;

$P(I)$  – вероятность наличия источника зажигания.

При соблюдении рационального режима проветривания горных выработок, правил безопасности ведения горных работ эти вероятности не превышают установленные предельно допустимые нормативные уровни, постоянно контролируются службой «Вентиляция и техника безопасности» шахты и корректируются в связи с изменяющейся ситуацией.

### 1. Способ прогнозирования опасности по экспериментальной частоте

Этот способ применяется при физическом моделировании взрывоопасных ситуаций на натурных или лабораторных стендах, на которых вызывается вспышка и фиксируется эмпирическая частота вспышки

$$f = \frac{m}{n},$$

где  $n$  – число экспериментов (объем выборки);

$m$  – количество вспышек.

Согласно «закону больших чисел» вероятность появления события

$$P(B) = p = \lim_{n \rightarrow \infty} f, \quad (1)$$

причем  $f$  распределена по нормальному закону, т.е. ее интегральной функцией распределе-

ния является выражение

$$P(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2)$$

где

$$t = \frac{f - p}{\sigma} \quad (3),$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (4)$$

– стандартное отклонение.

Так как  $\sigma$  определяется через математическое ожидание  $p$ , распределение (2) можно считать однопараметрическим.

Для оценки  $p$  строится доверительный интервал

$$f - \Delta \leq p < f + \Delta, \quad (5)$$

где

$$\Delta = \frac{z \sigma}{\sqrt{n}} \quad (6).$$

Из выражения (2) вытекает неравенство [1]

$$|t| < z, \quad (7)$$

решение которого имеет вид доверительного интервала

$$\frac{2fn + z^2 - z\sqrt{z^2 + 4nf(1-f)}}{2(n+z^2)} \leq p < \frac{2fn + z^2 + z\sqrt{z^2 + 4nf(1-f)}}{2(n+z^2)} \quad (8)$$

или

$$p \in [f_c - \Delta_1, f_c + \Delta_1], \quad (9)$$

где

$$f_c = \frac{2fn + z^2}{2(n+z^2)}, \quad (10)$$

$$\Delta_1 = \frac{z\sqrt{z^2 + 4nf(1-f)}}{2(n+z^2)} \quad (11)$$

Относительная ошибка определения  $p$  задается отношением:

$$\delta = \frac{\Delta_1}{f_c} = \frac{z\sqrt{z^2 + 4nf(1-f)}}{2fn + z^2} \quad (12)$$

По данным  $f$  и  $n$  эксперимента вычисляется  $\delta$ , которая не должна быть больше допустимой. Достоверность прогноза оценки вероятности события (величины  $p$ ) определяется интегралом (2). Например, при  $z = 5$  (уровень доверия составляет  $P(5) = 1 - 10^{-6}$ ),  $\delta = 0,13$ ;  $f = 1/10^3$ , вычисленный согласно формуле (12) объем экспериментов равен  $n = 1 \times 10^6$ .

Пример 1. Произведены  $n$  замеров концентрации метана в забое подготовительной выработки угольной шахты. Фиксируются  $m$  замеров «опасной» концентрации. Оценить вероятность возникновения опасной ситуации по доверительному интервалу,  $z = 5$ .

Вычисления (см. табл.) показывают, что при уменьшении  $f$  относительная погрешность вычислений возрастает и даже при  $f = 1$  составляет значительную величину ( $\delta = 0,56$ ).

Из выражения (12) вытекают предельные соотношения: если  $n \rightarrow \infty$ , то  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $f_c \rightarrow p$ ,  $f_c \rightarrow f$  из выражения (10),  $f \rightarrow p$  (закон больших чисел).

Из (12) следует: если  $f \rightarrow 0$  или  $n \rightarrow 0$ , то  $\delta \rightarrow 1$ .

Предельно допустимая вероятность опасного события совпадает с допустимым уровнем риска человеческой жизни

Таблица

№	$n$	$f$	$f_c$	$\Delta$	$\delta$	$f_c \pm \Delta$
1	10	1	0,64	0,36	0,56	$0,64 \pm 0,36$
2	5	0,2	0,45	0,44	0,98	$0,45 \pm 0,44$
3	50	0,02	0,18	0,18	1,00	$0,18 \pm 0,18$
4	5	0	0,41	0,41	1,00	$0,41 \pm 0,41$

$P_d = 10^{-6}$ . Следовательно, исследования на натурном стенде при условии  $p = P_d$  требуют для своего проведения объемов экспериментов, исчисляемых в миллионах, что нереализуемо.

## 2. Прогнозирование опасности по доверительной вероятности

Неприменимость рассмотренного способа оценки вероятности событий в области малых частот обусловлена малой информативностью: исследователя в выборке интересует только "опасное" событие. Необходимо, например, в задаче, приведенной выше, использовать информацию о всех значениях концентрации метана  $C$  в выборке. Ясно, что при  $n = 5$  невозможно найти закон распределения для генеральной совокупности, но можно оценить математическое ожидание МС в виде доверительного интервала, где  $\Delta$  - абсолютная погрешность вычислений МС,  $\bar{C}$  - среднее значение  $C$ ,

$$\bar{C} - \Delta \leq MC < \bar{C} + \Delta \quad (13)$$

Так как закон распределения величины  $C$ , в принципе, не известен, используют утверждение: «с увеличением размера выборки  $n$  выборочное распределение выборочного  $\bar{C}$  стремится к нормальному распределению независимо от вида распределения исходной случайной величины  $C$ » [2]. Вместо выражения (3) вводится параметр Стьюдента

$$t = \frac{\bar{C} - MC}{S\sqrt{n}}, \quad (14)$$

где  $S$  – стандартное отклонение величины  $C$ . Доказано, что  $S$

распределено по закону  $\chi^2$ , тогда  $t$  распределена по закону Стьюдента с функцией распределения

$$P(T) = 1 - 2 \int_0^T f(t) dt \quad (15)$$

где  $T$  таково, что  $P(T) = 1 - 10^{-6}$ ,  $f(t)$  – плотность распределения.

Если при такой высокой доверительной вероятности в доверительный интервал (с правого края) не вошло опасное значение  $C_d = 5\%$ , интервал можно считать безопасным. На дополнительный интервал, включающий опасное значение концентрации, приходится уровень доверия, равный  $1 - P(T) = 10^{-6}$ , что соответствует требованию безопасности.

Пример 2. Пусть давлением, разрушающим некоторую поверхность, является  $\eta_d = 5 \text{ т}/\text{м}^2$ . При работе машины давление принимало значения 3; 1; 2,5; 4; 2. С какой надежностью можно утверждать, что заданный режим безопасен? Вычисления показывают, что среднее  $\bar{\eta} = 2,5$ , выборочный стандарт отклонения  $S = 1$ . Безопасность работы гарантируется при условии  $\bar{\eta} + \Delta\eta < \eta_d$ , при этом

$$\Delta\eta < \eta_d - \bar{\eta}, \quad \text{где } \Delta\eta = \frac{tS}{\sqrt{n}}.$$

При  $t = 4,604$   $\Delta\eta = 2,06$  и выполняется  $2,06 < 5 - 2,5$  с доверительной вероятностью  $P = 0,99$ . Такая надежность широко применяется в технике.

Пример 3. Определить допустимую величину концентрации метана  $C_a$  в забое выра-

ботки угольной шахты с уровнем доверия  $P = 1 - 10^{-6}$  для обеспечения взрывобезопасности, если опасным значением концентрации является  $C_d = 5\%$ . Концентрация метана принимала значения 0,3; 0,5; 0,1; 0,3; 0,4.

Тогда  $\bar{C} = 0,31$ ;  $S = 0,206$ ;  $\Delta = \frac{TS}{\sqrt{n}} = 4,61$ ;  $\bar{C} + \Delta = 4,92 < 5$ .

Здесь уровню доверия  $P = 1 - 10^{-6}$  при  $n = 5$  соответствует  $T = 50$ . Из последнего неравенства видно, что с надежностью  $1 - 10^{-6}$  прогнозируется взрывобезопасная ситуация в забое выработки, если средства вентиляции обеспечивают среднее значение концентрации равное 0,3%. Такая же величина установлена, кстати, как норматив, на шахтах Германии, если  $P(I) = 1$ , т.е. не принимаются меры по предупреждению возникновения источников воспламенения.

Выводы:

1. Оценка малых вероятностей событий, влияющих на безопасность труда в промышленности, по экспериментальной частоте невозможна ввиду больших затрат времени, труда, средств на осуществление большого (до  $10^6$ ) объема экспериментов.

2. Вероятность риска человеческой жизни можно оценить в конкретных условиях по вероятности попадания опасного значения признака события в доверительный интервал этого признака.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бронштейн И.Н., Семеняев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
- Бендат Дж., Пирсон А. Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.

□ Автор статьи:

Липин  
Юрий Иванович  
- докт. техн. наук, доц. каф. высшей  
математики