

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.3

И.И. Петрушева

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим круговую замкнутую цилиндрическую оболочку радиуса R , длины l и толщины h , собранную из m упругих армированных слоев постоянной толщины. В качестве отсчетной поверхности выберем внутреннюю лицевую поверхность цилиндра. Введём цилиндрическую систему координат x, φ, z , где x – расстояние, отсчитываемое вдоль образующей от края оболочки, φ – угловая, z – поперечная координата. В этой системе уравнения поверхностей раздела k -го и $(k+1)$ -го слоев, где $k = 1, \dots, m-1$, запишутся в виде :

$$Z=h_k, 0=h_0 < h_1 < \dots < h_m = h.$$

При исследовании колебаний многослойной оболочки используем неклассическую модель[1], учитывающую поперечные сдвиговые деформации.

Линейные уравнения динамики оболочки составим, считая, что её слои армированы либо вдоль образующей (меридионально), либо по окружностям, параллельным торцевым плоскостям оболочки. Примем, что интенсивность армирования не зависит от угловой координаты φ , однако может изменяться вдоль образующей. Также оболочку считаем достаточно тонкой, поэтому во всех уравнениях можно пренебречь величинами порядка h/R по сравнению с 1. Замкнутая система уравнений динамики цилиндрической оболочки включает в себя следующие группы зависимостей [1] (здесь и ниже $k = 1, \dots, m$ – номер слоя):

- соотношения упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} &= a_{12}^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_{x\varphi}^{(k)} &= \sigma_{\varphi x}^{(k)} = a_{33}^{(k)} \varepsilon_{x\varphi}^{(k)}, \\ \tau_{xz}^{(k)} &= G_{13}^{(k)} \gamma_{xz}^{(k)}, \quad \tau_{\varphi z}^{(k)} = G_{23}^{(k)} \gamma_{\varphi z}^{(k)}; \end{aligned} \quad (1)$$

- закон распределения физических составляющих вектора перемещения по толщине пакета слоёв:

$$\begin{aligned} u_x^{(k)} &= u_x - z \frac{\partial w}{\partial x} + \mu_{11}^{(k)} \pi_x, \\ u_\varphi^{(k)} &= u_\varphi - \frac{z}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi, \quad v_z^{(k)} = w; \end{aligned} \quad (2)$$

- соотношения деформации - перемещения:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^{(k)} &= \frac{f'(z) \cdot \pi_x}{G_{13}^{(k)}}, \quad \gamma_{\varphi z}^{(k)} = \frac{f'(z) \cdot \pi_\varphi}{G_{23}^{(k)}}, \quad \varepsilon_{zz}^{(k)} = 0, \\ \varepsilon_{xx}^{(k)} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \mu_{11}^{(k)}}{\partial x} \pi_x + \mu_{11}^{(k)} \frac{\partial \pi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - z \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} + w \right), \\ 2\varepsilon_{x\varphi}^{(k)} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial x} - 2 \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{22}^{(k)}}{\partial x} \pi_\varphi + \\ &+ \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_x}{\partial \varphi} \right); \end{aligned} \quad (3)$$

- выражение физических составляющих обобщённых усилий и моментов оболочки через составляющие напряжений в её слоях:

$$\begin{aligned} [T_{xx}, M_{xx}, S_{xx}] &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \left[I, z, \mu_{11}^{(k)} \right] dz, \\ [T_{x\varphi}, M_{x\varphi}, S_{x\varphi}] &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{x\varphi}^{(k)} \left[I, z, \mu_{22}^{(k)} \right] dz, \\ [T_{\varphi\varphi}, M_{\varphi\varphi}, S_{\varphi\varphi}] &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \left[I, z, \mu_{22}^{(k)} \right] dz, \\ [T_{xz}, T_{\varphi z}] &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\tau_{xz}^{(k)}, \tau_{\varphi z}^{(k)} \right] dz, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left(\sigma_{xx}^{(k)} \frac{\partial \mu_{11}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\tau_{xz}^{(k)} f'(z)}{G_{13}^{(k)}} \right) dz, \\ Q_\varphi &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left(\sigma_{x\varphi}^{(k)} \frac{\partial \mu_{22}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\tau_{\varphi z}^{(k)} f'(z)}{G_{23}^{(k)}} \right) dz; \end{aligned}$$

- дифференциальные уравнения динамики оболочки:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi x}}{\partial \varphi} - \ddot{X}_x + q_x = 0, \\
 & \frac{\partial T_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \ddot{X}_{\varphi} + q_{\varphi} = 0, \quad (5) \\
 & \frac{T_{\varphi\varphi}}{R} - \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} - \\
 & - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} + \ddot{I} + \frac{\partial \ddot{Y}_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{Y}_{\varphi}}{\partial \varphi} + q_n = 0, \\
 & \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi x}}{\partial \varphi} - Q_x - \ddot{Z}_x + q'_x = 0, \\
 & \frac{\partial S_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - Q_{\varphi} - \ddot{Z}_{\varphi} + q'_{\varphi} = 0.
 \end{aligned}$$

В уравнениях (1) – (5) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \mu_{\alpha\alpha}^{(k)} &= \frac{f(z) - f(h_{k-1})}{G_{\alpha 3}^{(k)}} + \\
 &+ \sum_{j=1}^{k-1} \int_{h_{j-1}}^{h_j} \left(\frac{f(h_j) - f(h_{j-1})}{G_{\alpha 3}^{(j)}} \right) dz, \quad \alpha = 1, 2 \\
 \left[\ddot{X}_x, \ddot{Y}_x, \ddot{Z}_x \right] &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k v_x^{(k)} \left[I, z, \mu_{II}^{(k)} \right] dz, \\
 \left[\ddot{X}_x, \ddot{Y}_x, \ddot{Z}_x, I \right] &= \\
 &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k \left[v_{\varphi}, z v_{\varphi}, \mu_{22}^{(k)} v_{\varphi}, w \right] dz.
 \end{aligned}$$

Везде выше, $q_x, q_{\varphi}, q_n, q'_x, q'_{\varphi}$ – составляющие внешних поверхностных нагрузок, явное выражение перечисленных величин представлено в [1]. Функциональный параметр распределения поперечных сдвиговых напряжений по толщине оболочки, принят в виде $f(z) = z^3 - 1,5hz^2$.

Итак, (1) - (5) – замкнутая система, описывающая в линейном приближении колебания цилиндрической оболочки, - система пяти дифференциальных уравнений относительно функций $u_x, u_{\varphi}, w, \pi_{\varphi}, \pi_x$, которая должна интегрироваться при краевых условиях, полная система которых приведена в [1]. Здесь ограничимся рассмотрением оболочки с жестко защемленными краями $x = 0, x = l$. Соответствующие краевые условия:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = u_x = u_{\varphi} = \pi_x = \pi_{\varphi} = 0, \quad (6)$$

кроме того, в силу замкнутости контура оболочки, должно выполняться условие 2π -периодичности по угловой координате φ .

Следуя методике вывода [1 - 3], из системы (1) - (5) получим дифференциальные уравнения задачи о собственных колебаниях оболочки. Примем равными нулю составляющие внешних поверхностных и контурных нагрузок. Кроме того, в полученных уравнениях выполним преобразование $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$ (ω – частота собственных колебаний). В результате, уравнения (5) переходят в уравнения установившихся свободных колебаний оболочки:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi x}}{\partial \varphi} + \omega^2 X_x = 0, \quad (7) \\
 & \frac{\partial T_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 X_{\varphi} = 0, \\
 & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} - \\
 & - \frac{T_{\varphi\varphi}}{R} + \omega^2 \left(I + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Y_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi x}}{\partial \varphi} - Q_x + \omega^2 Z_x = 0, \\
 & \frac{\partial S_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - Q_{\varphi} + \omega^2 Z_{\varphi} = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, задача о свободных колебаниях цилиндрической оболочки сформулирована как краевая задача на собственные значения [4] для системы дифференциальных уравнений с частными производными (1) – (4), (6), (7).

Сформулированная модель допускает предельный переход к уравнениям классической теории [2, 5], основанной на постулате о недеформированных нормалях. Считая поперечные сдвиговые жесткости стремящимися к бесконечности, т. е. $G_{\alpha 3} \rightarrow \infty$ ($\alpha = 1, 2$), замечаем, что в системе (7) исчезают (тождественно удовлетворяются) уравнения, связанные с учётом поперечных сдвиговых деформаций. Таким образом, все перечисленные соотношения (1) - (7) переходят в соответствующие соотношения классической теории, которые использованы ниже для оценки полученных результатов.

Решение поставленной задачи строим, следуя методу, изложенному в [1]. Представим систему (1) - (4), (6), (7) в матричной форме, вводя равенствами (8) безразмерную независимую переменную ξ и вектор-столбец $y = [y_1, \dots, y_{12}]^T$ безразмерных кинематических и силовых характеристик напряжённо-деформированного состояния оболочки:

$$\begin{aligned}
x &= l \cdot \xi, \bar{\rho}_k = l^2 \rho_k / E_1^c, & (8) \\
w &= h \cdot y_1, y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x}, u_x = l \cdot y_3, \\
u_\varphi &= l \cdot y_4, \pi_x = \frac{E_1^c l}{h^3} y_5, \pi_\varphi = \frac{E_1^c l}{h^3} y_6, \\
\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 Y_x &= h^2 E_1^c y_7, \\
RM_{xx} &= h^2 E_1^c l \cdot y_8, RT_{xx} = h E_1^c l \cdot y_9, \\
RT_{\varphi x} &= h E_1^c l \cdot y_{10}, \\
RS_{xx} &= h^4 E_1^c l \cdot y_{11}, RS_{x\varphi} = h^4 E_1^c l \cdot y_{12}.
\end{aligned}$$

Здесь E_1^c – модуль Юнга [5] материала связующего первого (внутреннего) слоя оболочки. В этих переменных, задача приняла вид:

$$A(\xi, D_\varphi) \frac{\partial y}{\partial \xi} = B(\xi, D_\varphi) y + \omega^2 C(\xi, D_\varphi) y, \quad (9)$$

$$\|E_6, O_6\|y(0, \varphi) = 0, \quad \|E_6, O_6\|y(1, \varphi) = 0.$$

Здесь A, B, C – матрицы 12×12 , элементы которых – полиномы от дифференциального оператора $D_\varphi = \partial/\partial\varphi$ с коэффициентами, зависящими от ξ ; E_6, O_6 – матрицы 6×6 , единичная и нулевая соответственно. Приведем выражения для элементов перечисленных матриц. С этой целью введем безразмерные параметры

$$\begin{aligned}
\beta_i &= h_i / h \quad (i = 0, \dots, m), \quad s_k = E_k^c / E_1^c, \\
\gamma &= h / R, \quad \delta = l / R,
\end{aligned}$$

где E_k^c – модуль Юнга связующего k -го слоя, безразмерные тангенциальные и поперечные жесткости слоев

$$a_{ij}^{(k)} = E_k^c b_{ij}^{(k)}, \quad G_{i3}^{(k)} = E_k^c d_{i1}^{(k)},$$

$$d_{i2}^{(k)} = d_{i1}^{(k)} \quad (d_{i1}^{(k)} = \partial d_{i1}^{(k)} / \partial \xi)$$

и примем обозначения:

$$\begin{aligned}
t_{ik} &= \frac{1}{i+1} \left(\beta_k^{i+1} - \beta_{k-1}^{i+1} \right); \\
\lambda_{i1} &= 0, \quad \lambda_{i,k+1} = \lambda_{ik} + \left(\beta_k^3 - 1,5 \beta_k^2 \right) \times \\
&\times \left(\frac{1}{s_k d_{i1}^{(k)}} - \frac{1}{s_{k+1} d_{i1}^{(k+1)}} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{i1} &= 0, \quad \nu_{i,k+1} = \nu_{ik} + \left(\beta_k^3 - 1,5 \beta_k^2 \right) \times \\
&\times \left(\frac{d_{i2}^{(k+1)}}{s_{k+1} d_{i1}^{(k+1)} d_{i1}^{(k+1)}} - \frac{d_{i2}^{(k)}}{s_k d_{i1}^{(k)} d_{i1}^{(k)}} \right); \\
r_{\alpha\beta k} &= \frac{t_{6k} - 3t_{5k} + 2,25t_{4k}}{s_k^2 d_{\alpha 1}^{(k)} d_{\beta 1}^{(k)}} + (t_{3k} - 1,5t_{2k}) \times \\
&\times \left(\frac{\lambda_{\alpha k}}{s_k d_{\beta 1}^{(k)}} + \frac{\lambda_{\beta k}}{s_k d_{\alpha 1}^{(k)}} \right) + \lambda_{\alpha k} \lambda_{\beta k} t_{0k}; \\
q_{\alpha j k} &= - \frac{d_{\alpha 2}^{(k)} (t_{3+j,k} - 1,5t_{2+j,k})}{s_k d_{\alpha 1}^{(k)} d_{\alpha 1}^{(k)}} + \nu_{\alpha k} t_{jk}; \\
q_{\alpha\beta k} &= - \frac{d_{\alpha 2}^{(k)} (t_{6k} - 3t_{5k} + 2,25t_{4k})}{s_k^2 d_{\alpha 1}^{(k)} d_{\alpha 1}^{(k)} d_{\beta 1}^{(k)}} + (t_{3k} - 1,5t_{2k}) \times \\
&\times \left(\frac{\nu_{\alpha k}}{s_k d_{\beta 1}^{(k)}} - \frac{\lambda_{\beta k} d_{\alpha 2}^{(k)}}{s_k d_{\alpha 1}^{(k)} d_{\alpha 1}^{(k)}} \right) + \nu_{\alpha k} \lambda_{\beta k} t_{0k}; \\
r_{\alpha j k} &= \frac{t_{3+j,k} - 1,5t_{2+j,k}}{s_k d_{\alpha 1}^{(k)}} + \lambda_{\alpha k} t_{jk}; \\
\eta_{ik} &= \left(\frac{d_{i2}^{(k)}}{s_k d_{i1}^{(k)} d_{i1}^{(k)}} \right)^2 (t_{6k} - 3t_{5k} + 2,25t_{4k}) - \\
&- 2(t_{3k} - 1,5t_{2k}) \frac{\nu_{ik} d_{i2}^{(k)}}{s_k d_{i1}^{(k)} d_{i1}^{(k)}} + \nu_{ik}^2 t_{0k}.
\end{aligned}$$

Выражения для ненулевых элементов a_{ij} , b_{ij} матриц A, B :

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = -\frac{\gamma^2}{\delta^3} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{2k},$$

$$a_{23} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{1k},$$

$$a_{25} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} r_{11k},$$

$$a_{32} = -\frac{\gamma^2}{\delta^2} a_{23}, \quad a_{33} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{0k},$$

$$\begin{aligned}
a_{35} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \bar{r}_{10k}, & a_{11,6} &= \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} r_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad a_{11,11} = 1, \\
a_{44} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{0k}, & a_{12,2} &= -\frac{\gamma^2}{\delta^2} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{46} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{20k}, & a_{12,3} &= \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{52} &= -\frac{\gamma^2}{\delta^2} a_{25}, \quad a_{53} = a_{35}, & a_{12,4} &= -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{q}_{20k}, \\
a_{55} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} r_{11k}, \quad a_{64} = a_{46}, & a_{12,5} &= \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} r_{12k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{66} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} r_{22k}, & a_{12,6} &= -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} q_{22k}, \quad a_{12,12} = 1. \\
a_{72} &= \frac{\gamma}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(t_{1k} - \pi_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), & b_{12} &= 1, \quad b_{21} = -a_{72}, \quad b_{24} = \frac{\delta^2}{\gamma^2} a_{10,2}, \\
a_{73} &= -\frac{\delta}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(t_{0k} - \pi_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad a_{77} = 1, & b_{25} &= -\frac{\delta^2}{\gamma^2} a_{11,2}, \quad b_{26} = \frac{\delta^2}{\gamma^2} a_{12,2}, \\
a_{75} &= -\frac{\delta}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(\bar{r}_{10k} - \gamma \bar{r}_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), & b_{28} &= 1, \quad b_{31} = \frac{\gamma^2}{\delta^2} a_{73}, \quad b_{34} = -a_{10,3}, \\
a_{84} &= 2 \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad a_{88} = 1, & b_{35} &= a_{11,3}, \quad b_{36} = -a_{12,3}, \quad b_{39} = 1, \quad b_{42} = \frac{\gamma^2}{\delta^2} a_{84}, \\
a_{86} &= 2 \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad a_{99} = 1, & b_{43} &= -\delta a_{44} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad b_{45} = -a_{11,4}, \quad b_{46} = a_{12,4}, \\
a_{10,2} &= -\frac{\gamma^2}{\delta^2} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, & b_{4,10} &= 1, \quad b_{51} = \frac{\gamma^2}{\delta^2} a_{75}, \quad b_{54} = -a_{10,5}, \\
a_{10,3} &= \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{0k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, & b_{55} &= -a_{11,5}, \quad b_{56} = -a_{12,5}, \quad b_{5,11} = 1, \\
a_{10,5} &= \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{10k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad a_{10,10} = 1, & b_{62} &= \frac{\gamma^2}{\delta^2} a_{86}, \quad b_{63} = -\sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{11,2} &= \frac{\gamma^2}{\delta^3} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \bar{q}_{11k}, & b_{65} &= -a_{11,6}, \quad b_{66} = a_{12,6}, \quad b_{6,12} = 1, \\
a_{11,3} &= -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \bar{q}_{10k}, & b_{71} &= \delta \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(t_{0k} - 2\pi_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 t_{2k} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \right), \\
a_{11,4} &= \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{10k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, & b_{74} &= \frac{\delta^2}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(t_{0k} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \pi_{1k} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right), \\
a_{11,5} &= -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} q_{11k}, & b_{76} &= \frac{\delta^2}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(\bar{r}_{20k} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \gamma \bar{r}_{21k} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right), \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{83} &= -2\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\
b_{85} &= -2\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\
b_{86} &= -2 \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{q}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{87} &= 1, \quad b_{9,10} = -\delta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{10,1} &= -\gamma \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(t_{0k} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \pi_{1k} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right), \\
b_{10,4} &= -\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{0k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\
b_{10,5} &= - \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{q}_{10k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{10,6} &= -\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\
b_{11,1} &= \frac{\gamma}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(\bar{q}_{10k} - \gamma \bar{q}_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \\
b_{11,2} &= 2 \frac{\gamma^2}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\
b_{11,3} &= -\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{10k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad b_{11,4} = -b_{10,5}, \\
b_{11,5} &= \sum_{k=1}^m s_k \left(\frac{1}{\delta} b_{11}^{(k)} \eta_{1k} - \delta b_{33}^{(k)} r_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \\
&\quad + \frac{9\delta}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{4,k} - 2t_{3,k} + t_{2,k}}{s_k d_{11}^{(k)}}, \\
b_{11,6} &= \sum_{k=1}^m s_k \left(b_{12}^{(k)} q_{12k} - b_{33}^{(k)} q_{21k} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{12,1} &= -\frac{\gamma^2}{\delta^2} b_{76}, \quad b_{12,2} = \frac{\gamma^2}{\delta^2} b_{86}, \\
b_{12,3} &= \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{q}_{20k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{12,4} &= -\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad b_{12,5} = -b_{11,6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{12,6} &= \sum_{k=1}^m s_k \left(\frac{1}{\delta} b_{33}^{(k)} \eta_{2k} - \delta b_{22}^{(k)} r_{22k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \\
&\quad + \frac{9\delta}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{4,k} - 2t_{3,k} + t_{2,k}}{s_k d_{21}^{(k)}}.
\end{aligned}$$

Выражения для ненулевых элементов c_{ij} матрицы параметрических членов C :

$$\begin{aligned}
c_{71} &= -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \left(t_{0k} - \gamma^2 t_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \\
c_{74} &= - \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
c_{76} &= - \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad c_{82} = \frac{\gamma^2}{\delta^3} \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{2k}, \\
c_{83} &= -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k}, \quad c_{85} = -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{11k}, \\
c_{92} &= -\frac{\gamma^2}{\delta^2} c_{83}, \\
c_{93} &= -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k}, \quad c_{95} = -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{10k}, \\
c_{10,1} &= -\frac{\gamma^2}{\delta^2} c_{74}, \quad c_{10,3} = c_{93}, \\
c_{10,6} &= -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{20k}, \quad c_{11,2} = -\frac{\gamma^2}{\delta^2} c_{85}, \\
c_{11,3} &= c_{95}, \\
c_{11,5} &= -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k r_{11k}, \quad c_{12,1} = -\frac{\gamma^2}{\delta^2} c_{76}, \\
c_{12,4} &= c_{10,6}, \quad c_{12,6} = -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k r_{22k}.
\end{aligned}$$

Отметим, что уравнения классической теории могут быть получены из уравнений (9) вычёркиванием из матриц A , B , C строк и столбцов с номерами 5, 6, 11, 12. Описанный выше предельный переход гарантирует, что элементы соответствующих строк и столбцов обращаются в нуль. Таким образом, коэффициенты классической системы дифференциальных уравнений свободных колебаний цилиндрической оболочки составляют матрицы размера 8×8 .

Решение задачи (9) строим в виде тригонометрического ряда Фурье [6] с векторными коэффициентами $y_n(\xi)$:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\xi) \cdot e^{in\varphi}. \quad (10)$$

Очевидно, что представление решения в форме (10) позволяет удовлетворить условию периодичности по угловой координате. Подставляя это решение в краевую задачу (9) и отделяя угловую переменную, приходим к распадающимся по индексу n линейным краевым задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} y'_n(\xi) &= A_n^{-1}(\xi)B_n(\xi)y_n(\xi) + \\ &+ \omega^2 A_n^{-1}(\xi)C_n(\xi)y_n(\xi), \\ \|E_6, O_6\|y(0) &= 0, \quad \|E_6, O_6\|y(1) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Элементы матриц A_n , B_n , C_n легко получить из элементов матриц A , B , C , выполнив преобразование $D_\phi \rightarrow in$. При анализе системы (9) видно, что во всех уравнениях степени оператора D_ϕ , действующего на 4, 6, 10, 12 компоненты вектора y , и степени этого оператора на остальных компонентах имеют противоположные четности. Поэтому задачи (11) приводятся к вещественным, если элементы вектора y с номерами 4, 6, 10, 12 умножить на мнимую единицу i .

Обозначив через $G(\xi, p)$ матрицу Грина [1, 4, 7] краевой задачи ассоциированной с (11)

$$y'_n(\xi) = A_n^{-1}(\xi)B_n(\xi)y_n(\xi),$$

перейдем к равносильной задаче поиска спектра линейной однородной системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода [4, 7]:

$$y_n(\xi) - \omega^2 \int_0^1 G_n(\xi, p)A_n^{-1}(p)C_n(p)y_n(p)dp = 0. \quad (12)$$

Решение (12) строим в пространстве $L_2(0, 1)$ методом Бубнова - Галеркина [8, 9]. Согласно этому методу, выберем в $L_2(0, 1)$ полную линейно независимую ортонормированную систему непрерывных функций $\{v_k(\xi)\}_{k=1}^\infty$ [6, 10]. Приближенное решение y_{nL} системы (12) ищем в виде:

$$y_{nL}(\xi) = \sum_{k=1}^L c_k \cdot v_k(\xi).$$

Подставляя в (12) и требуя ортогональности неизвестки ко всем координатным векторам $\{v_k(\xi)\}_{k=1}^L$, приходим к системе линейных однородных уравнений для определения c_k :

$$\begin{aligned} c_i &= \omega^2 \times \\ &\times \sum_{k=1}^L c_k \left[\int_0^1 \int_0^1 G_n(\xi, p)A_n^{-1}(p)C_n(p)v_k(p)dp \right] v_i(\xi) d\xi, \\ i &= 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (13)$$

Внутренние интегралы в (13) являются решениями краевых задач

$$z'(\xi) = A_n^{-1}(\xi)B_n(\xi)z(\xi) + \omega^2 A_n^{-1}(\xi)C_n(\xi)z(\xi),$$

$$\|E_6, O_6\|z(0) = 0, \quad \|E_6, O_6\|z(1) = 0,$$

которые эффективно вычисляются по методу инвариантного погружения [1]. Вычисление внешних интегралов с помощью квадратурной формулы Симпсона [11] завершает формирование матрицы коэффициентов системы (13). Физический интерес представляют только нетривиальные решения этой системы. Определение таких решений осуществлялось численно при помощи QR-алгоритма в сочетании с приведением матрицы к верхней форме Хессенберга [12]. Ниже представлены результаты расчетов. При вычислениях использована модель армированного слоя, описанная в [1].

В табл. 1 приведены данные, позволяющие оценить скорость сходимости метода относительно параметра L , и соответствующие значения шести низших собственных частот $\omega_0, \dots, \omega_5$ осесимметричных форм колебаний. Результаты получены для двухслойной композитной цилиндрической оболочки, первый (внутренний) слой которой армирован в меридиональном направлении, а второй – в окружном. Принимаем геометрические:

$$l = 10m, l/R = 2, R/h = 20, h_1 - h_0 = h_2 - h_1 = 0.5 \quad (14)$$

механические:

$$E_1^c = E_2^c = 3000 \text{ МПа}, E_1^a = E_2^a = 250 \text{ ГПа}, \quad (15)$$

$$\nu_1^c = \nu_2^c = \nu_1^a = \nu_2^a = 0.3$$

$$\rho_1^c = \rho_2^c = 1250 \text{ кг/м}^3, \rho_1^a = \rho_2^a = 1710 \text{ кг/м}^3$$

и структурные:

$$w_1 = w_2 = w_{z1} = w_{z2} = 0.5 \quad (16)$$

параметры оболочки.

Координатные функции были выбраны в виде:

$$v_{kj}(\xi) = \sqrt{2k-1} P_{k-1}(2\xi-1) \cdot e_j, \quad (17)$$

где $P_k(t)$ – ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ полиномы Лежандра [10, 13]; e_j – ортонормированные векторы базиса в декартовой системе координат R^{12} [10].

Из табл. 1 видно, что в рассмотренном процессе приближения сверху к точным значениям собственных частот, стабилизация вычисления трех низших частот достигается при $L = 6$, четвертой – при $L = 8$, пятой – при $L = 10$, а шестой – при $L = 12$. Расчеты показали, что описанная ситуация типична и в случае неосесимметричных форм колебаний, это позволило во всех дальнейших расчетах принять $L = 12$. Отметим, что в описанном примере осесимметричные формы собственных колебаний, соответствующие частотам $\omega_2, \omega_3, \omega_5$, являются изгибными, а частотам ω_0, ω_1 ,

Таблица 1

Оценка скорости сходимости относительно параметра L, Гц						
L	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
4	352.45	707.26	1 016.99	1 035.12	1 462.90	1 512.56
6	352.35	704.72	1 015.59	1 026.65	1 071.24	1 086.31
8	352.35	704.71	1 015.59	1 026.58	1 057.29	1 059.32
10	352.35	704.71	1 015.59	1 026.58	1 057.06	1 058.59
12	352.35	704.71	1 015.59	1 026.58	1 057.06	1 058.58
14	352.35	704.71	1 015.59	1 026.58	1 057.06	1 058.58
16	352.35	704.71	1 015.59	1 026.58	1 057.06	1 058.58

этих расчетов, полученных при параметрах (14) - (17), на рис.2. Из графика, как и из таблицы, следует, что все представленные частоты имеют минимумы, на наличие которых указано в монографиях [1, 2, 5].

Проведено исследование зависимости значений низших собственных частот $\omega_0 \dots \omega_5$ при варьировании параметра R/h , остальные характеристики оболочки соответствуют (14) - (17). В таблице 3 представлены результаты, из которых следует, что в случае осесимметричных колебаний

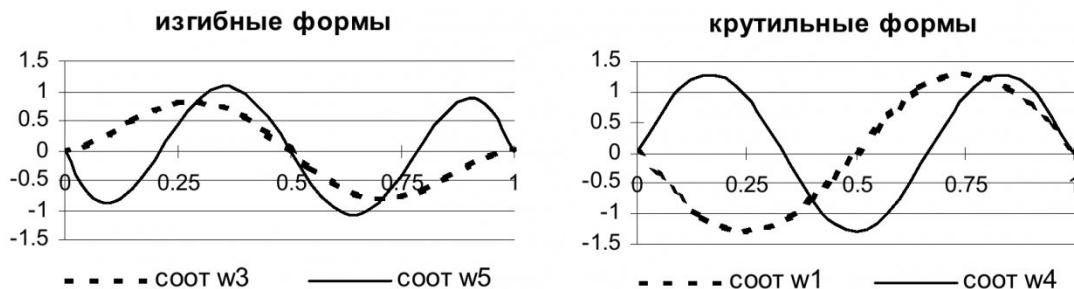
Рис. 1. Формы колебаний, соответствующие частотам $\omega_1, \omega_3 - \omega_5$.

Таблица 2

n	неклассическая теория			классическая теория			относ погрешность, %		
	ω_0	ω_1	ω_2	ω_0	ω_1	ω_2	ω_0	ω_1	ω_2
0	352	705	1 016	352	705	1 016	0.0	0.0	0.0
2	172	340	518	172	342	524	-0.4	-0.7	-1.2
4	184	279	420	186	283	429	-1.2	-1.5	-2.3
6	347	398	499	356	410	516	-2.7	-2.9	-3.4
8	589	623	696	617	653	731	-4.7	-4.8	-5.1
10	891	917	972	954	982	1 043	-7.0	-7.1	-7.2
12	1 242	1 263	1 307	1 362	1 385	1 435	-9.7	-9.7	-9.8
14	1 632	1 651	1 688	1 837	1 858	1 900	-12.6	-12.5	-12.6

ω_4 – крутильными (рис.1).

В табл. 2 приведены результаты расчета трех низших собственных частот свободных колебаний цилиндрической оболочки в зависимости от параметра окружного волнообразования n . Из таблицы следует, что неучет поперечных сдвиговых деформаций приводит к завышению расчетных значений собственных частот, которое увеличивается с ростом номера n . Однако, в случае осесимметричных колебаний ($n = 0$) погрешность составила менее десятых процента. Графическая иллюстрация

для частоты Ω_5 погрешность составляет не более 3%, при этом для остальных частот она не превышает 0,3%. Поэтому можно говорить о пренебре-

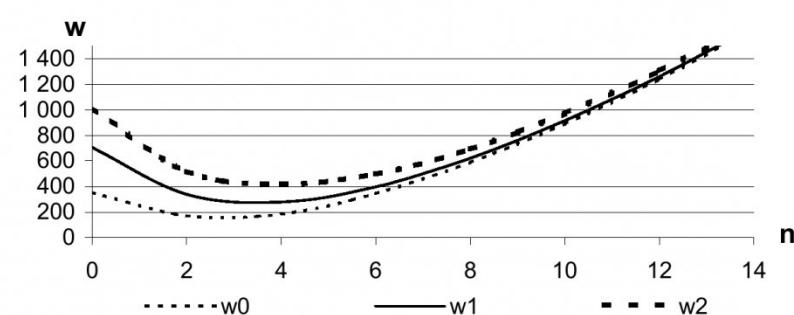
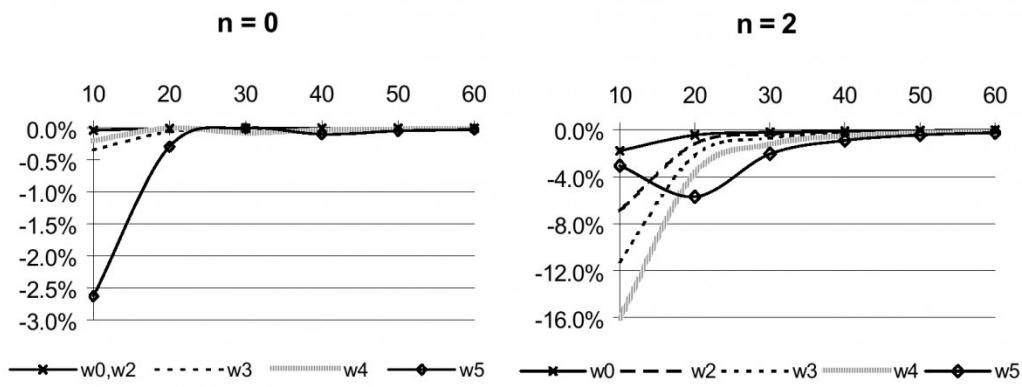


Рис. 2. Зависимость от параметра n трех низших собственных частот

Таблица 3

Зависимость частот от толщины оболочки, Гц										
n = 0	неклассическая теория					классическая теория				
R/h	ω_0	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_0	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
10	352	1 020	1 053	1 057	1 143	352	1 020	1 053	1 059	1 173
20	352	1 016	1 027	1 057	1 059	352	1 016	1 027	1 057	1 062
30	352	1 015	1 020	1 037	1 057	352	1 015	1 020	1 037	1 057
40	352	1 014	1 017	1 028	1 048	352	1 014	1 017	1 028	1 049
60	352	1 014	1 015	1 021	1 031	352	1 014	1 015	1 021	1 031
n = 2	неклассическая теория					классическая теория				
R/h	ω_0	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_0	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
10	202	655	940	1 258	1 601	205	701	1 045	1 460	1 650
20	172	518	707	915	1 147	172	524	723	949	1 212
30	164	478	632	790	959	164	480	637	800	978
40	161	462	600	734	869	161	463	602	738	877
60	158	449	574	687	792	158	449	575	688	794

Рис. 3. Относительная погрешность вычисления частот ω_0 , ω_2 - ω_5 при варьировании параметра R/h

жимо малом влиянии введенного уточнения. Однако, уже при $n = 2$, неучет поперечных сдвиговых деформаций приводит к увеличению расчетных значений частот толстых оболочек от 2 до 16%, при этом частоты колебаний тонких оболочек завышаются менее чем на 4% (рис. 3).

Аналогичная картина (табл. 4) наблюдается при варьировании параметра l/R . В случае осесимметричных колебаний расчетные значения

частот коротких оболочек ($l/R = 0,5$), полученные на основе уравнений классической теории, больше соответствующих значений, определяемых с учетом сдвига, в пределах от 1,5 до 15%. Для остальных случаев уточнения незначительны и составляют менее 2%. При $n = 2$, неучет сдвига приводит, для коротких оболочек, к увеличению значения частоты ω_1 на 9,7%, а ω_5 – на 18%. С измене-

Таблица 4

Зависимость частот от длины оболочки, Гц										
n = 0	неклассическая теория					классическая теория				
l/R	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0.5	352	437	690	705	1 010	352	476	705	813	1 057
1	513	547	634	705	788	513	549	649	705	830
1.5	705	762	774	808	876	705	762	775	811	885
2	705	1 015	1 020	1 037	1 057	705	1 015	1 020	1 037	1 057
4	705	1 057	1 409	1 589	1 762	705	1 057	1 409	1 589	1 762
n = 2	неклассическая теория					классическая теория				
R/h	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0.5	403	650	682	883	1 004	442	656	798	886	1 185
1	335	510	714	957	1 181	339	526	757	1 047	1 185
1.5	325	483	646	826	1 030	327	487	657	852	1 081
2	322	478	632	790	959	323	480	637	800	978
4	313	473	629	782	933	313	474	630	784	936

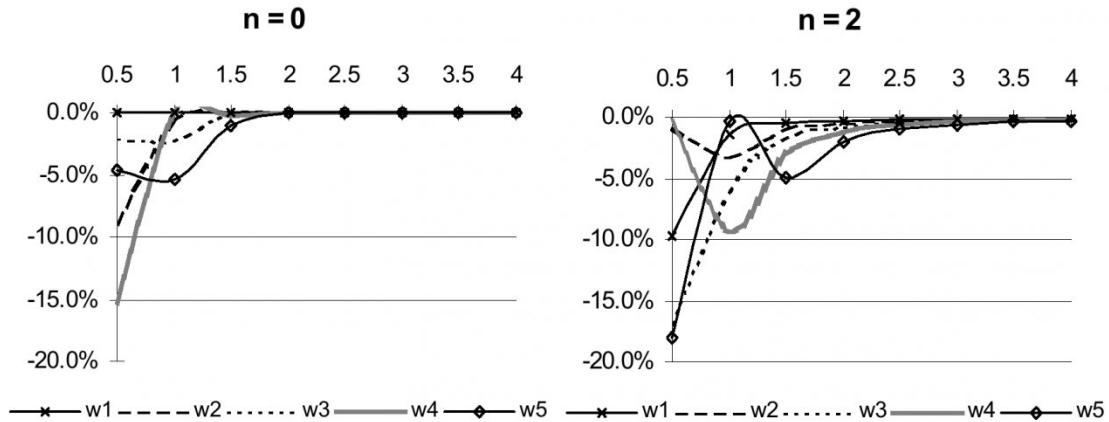


Рис. 4. Относительная погрешность вычисления частот $\omega_1 - \omega_5$ при варьировании параметра l/R

Таблица 5

Зависимость частот от материалов слоев оболочки, Гц								
$n = 2$	$\omega \setminus E$.001	0.125	5	25	100	400	800
неклассич- ская теория	ω_0	347	365	360	329	336	397	362
	ω_1	599	632	627	573	584	689	626
	ω_2	734	782	798	727	732	852	771
	ω_3	801	870	937	844	829	943	847
	ω_4	845	950	1 100	970	919	1 013	902
	ω_5	888	1 048	1 308	1 119	1 016	1 083	956
классическая теория	ω_0	347	365	360	330	340	405	372
	ω_1	599	632	628	577	594	711	650
	ω_2	734	782	802	739	761	913	833
	ω_3	801	870	946	877	904	1 086	990
	ω_4	845	952	1 122	1 046	1 079	1 298	1 183
	ω_5	888	1 051	1 351	1 267	1 308	1 576	1 434
относительная погреш- ность, %	ω_0	0.0	0.0	0.0	-0.5	-1.2	-2.2	-2.5
	ω_1	0.0	0.0	-0.2	-0.7	-1.8	-3.3	-3.9
	ω_2	0.0	0.0	-0.4	-1.6	-4.0	-7.1	-8.0
	ω_3	0.0	-0.1	-0.9	-3.9	-9.0	-15.1	-16.8
	ω_4	0.0	-0.1	-1.9	-7.8	-17.5	-28.1	-31.1
	ω_5	0.0	-0.3	-3.3	-13.2	-28.8	-45.5	-50.0

«особый случай»

нием параметра l/R от 1,5 до 4, прослеживается тенденция к уменьшению погрешности вычисления всех частот до 0,2%.

Из сказанного следует, что длинные оболочки при параметрах (14) - (17) нечувствительны к уточнению неклассической теории.

В табл. 5 приведены результаты, полученные при варьировании механических параметров материала. Здесь рассматривалась трехслойная оболочка, собранная из изотропных слоев, причем первый и третий слои одинаковы. Варьировалось отношение модулей Юнга первого (E_1) и второго (E_2) слоев. Параметры (14), (16), (17) остались прежними, лишь $R/h = 30$. Обозначим через $E = E_1/E_2$. Анализ данных позволяет говорить о том, что если частоты ω_0 и ω_1 , полученные без учета сдвига, завышены не более чем на 4%, ω_2 – до 8%,

то погрешность при вычислении частот ω_4 и ω_5 достигает 50%; причем она резко возросла для $E > 100$. Если же оболочку собрать иначе: первый и третий слои армировать меридионально, второй слой определить как изотропный из связующего, то погрешность расчета становится значительной и при расчете низших частотах (см. «особый случай» в таблице 5, здесь $E = E_1^a/E_2$). Действительно, если $E = 400$, то частота ω_1 завышена на 16%, а ω_2 и ω_5 – на 24%; при $E = 800$ значения ω_0 и ω_4 больше уточненного на 13%, ω_1 – на 31%, ω_3 и ω_5 – на 21%. Очевидно, что в подобных ситуациях, учет поперечных сдвигов несет большую ответственность. Интересно, что при аналогичном окружном армировании погрешность вычисления всех частот не превосходит 3%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. - Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.
2. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. -Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
3. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. -М.: Наука, 1979. 383 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. -М.: Наука, 1974. Т.4. Ч.1,2. 880 с.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластиинки и оболочки. -М.: Наука, 1966. 635 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. -М.: Наука, 1974. Т.2. 655 с.
7. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. -М.: Наука, 1959. 655 с.
8. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. -М.: Наука, 1970. 512 с.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. -М.: Наука, 1977. 656 с.
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. -М.: Наука, 1984. 752 с.
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. -М.: Наука, 1974. Т.1. 480 с.
12. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. -М.: Наука, 1970.
13. Смирнов В.И. Курс высшей математики. -М.: Наука, 1974. Т.3. Ч.2. 672 с.

□ Автор статьи:

Петрушева

Ирина Ивановна

- старший преподаватель каф. прикладной математики

УДК 624.131.5: 550.372

С.М. Простов, О.В. Герасимов, Е.А. Мальцев

КОМПЛЕКСНЫЙ ГЕОКОНТРОЛЬ ПРОЦЕССОВ ИНЪЕКЦИОННОГО УКРЕПЛЕНИЯ ВЛАГОНАСЫЩЕННЫХ ГРУНТОВ

Опытно-промышленные испытания комплексного метода геоконтроля гидродинамических и геомеханических процессов в закрепляемых грунтах проведены на площадке строящейся базы служебного автотранспорта ОВО (г. Кемерово, ул. Железнодорожная). Исследование физико-механических свойств грунтов, проектирование и устройство фундаментов здания базы в обводненных неустойчивых грунтах с изготовлением буроинъекционных свай методом фиксировано-высоконапорной цементации по технологии ООО "НООЦЕНТР -Д" проведены в 2002 – 2003 гг.

Методической основой комплексного геоэлектрического контроля являются экспериментально установленные в [1] диапазоны изменения удельного электросопротивления глинистых грунтов при их насыщении природными и закрепляющими растворами разной концентрации в широком диапазоне частот и твердении грунтовых образцов.

Согласно инженерно-геологическим изысканиям, прорезаемые буроинъекционными сваями геологические слои представлены почвой с включением строительного и бытового мусора, суглинками легкими высокопористыми от бурых до серых, суглинками тяжелыми серыми высокопористыми. Наличие подстилающего слоя тяжелых суг-

линков способствовало образованию безнапорного горизонта грунтовых вод на глубине 0,3-1,0 м от земной поверхности и заболачиванию местности, что потребовало применения специальной технологии выполнения фундаментов с закреплением.

Технология закрепления состояла в следующем. На участке изготовления буроинъекционных свай пробурены лидерные скважины на глубину 0,6-0,7 м, через которые задавливались перфорированные инъекторы на глубину 5,5 м. В устьевой части инъекторов на глубину 0,5 м выполнен тампонаж затрубного пространства раствором на расширяющемся цементе. После монтажа инъекторов производились работы по устройству железобетонного ростверка, а затем осуществлялось поочередное нагнетание в инъекторы цементно-песчаного раствора.

Раствор имел следующий состав (на 1 м³): песок мелкий с примесью глинистых частиц до 2% и пылеватых частиц до 20% - 1150 кг; портландцемент М400-750 кг; вода – 450 л; специальные патентованные добавки; контрастная соль *NaCl* – 5 кг.

Давление нагнетания поддерживали постоянным *P* = 0,8-1 МПа по зажимной схеме, время на-