МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.21 +519.876.5

А.С.Сорокин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК АСИММЕТРИЧНОЙ И СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМ MSMQ СО СЛУЧАЙНЫМ ОПРОСОМ

Введение. В работе рассмотрено исследование моделирования оценки характеристик с использованием языка PEPA. Полученные примеры при исследовании моделирования будут использоваться, чтобы показать методы упрощения модели. При исследовании рассматриваются и сравниваются различные системы: асимметричные и симметричные системы MSMQ со случайным опросом. Они являются расширением традиционной системы опроса и обычно применяются к моделям, в которых множественные ресурсы разделены среди нескольких пользователей, возможно с различными требованиями [1-14]. Приведённые примеры включают локальные сети с многочисленными маркерами и сетями взаимосвязи мультишин в распределенных системах. Подобные системы были исследованы в [15-29].

Далее приводится подробная информация о каждой модели, указываются значения применённых параметров, и приводятся графики, показывающие изменение среднего времени ожидания в зависимости от изменения условий в данной системе.

1. Асимметричная система MSMQ со случайным опросом. Рассмотрим асимметричную систему, в которой ёмкости узлов в системе отличаются.

В системе имеются три узла, один с ёмкостью 2, а два с ёмкостью 1. Случайный опрос в системе означает, что при переходе от узла сервер может перейти к любому узлу, даже к тому же самому узлу снова. Обслуживание ограничено, так как сервер, достигающий узла $Node_1$, когда он полон, мог бы перед переходом обслужить только одного представителя клиента. Однако, если второй сервер прибывает позже, в то время как первое обслуживание все еще происходит, то он может одновременно занять узел. Система может быть классифицирована как

$$M_i / M_i / M /(2,1,1)/ Q \times S / L .$$

Обгон разрешен в том смысле, что сервер при достижении узла не находит клиента и будет переходить дальше.

Модель этой системы на языке PEPA приведена на рис. 1. Предполагаем, что $Node_1$ – узел с характеристиками, которые отличают не только его большую ёмкость, но также и более скоростной ответ на вопросы сервера. Теперь эти вопросы представлены раздельно при *проходе* (*pass*) действий или при *включении* (*engage*).

Предполагаем, что найдется процесс, производящий места для каждого клиента в буфере для узла так, чтобы оценка прибытия, когда буфер пуст, была удвоенной оценкой прибытия, в случае, когда одно место в буфере уже занято.

В компоненте сервера S действие *блуждания* (*walk*) представлено тремя различными действиями, каждое с оценкой деятельности $\omega/3$, вероятность каждого из результатов есть $1/3$. S_j обозначает представитель сервера в узле $Node_j$, когда его можно включать (*engage*) или проходить (*pass*) в зависимости от того, есть ли требования у клиента по обслуживанию узла или нет.

На рис. 2 показана модифицированная версия узла $Node_1$. В этой второй версии предполагаем, что есть дефект в $Node_1$ такой, что не можем гарантировать, правильно ли ответит сервер, когда буфер полностью пуст или полностью полон. В случае, когда только одно место в буфере занято, то с вероятностью 0.5 он ответит, что как будто буфер был пуст. В случае, когда один клиент уже находится в обслуживании, но другое место в буфере также занято, он так же потерпит неудачу с вероятностью 0.5, разрешая второму серверу уйти без обеспечения обслуживания. Исследуем влияние этого дефекта на среднее время ожидания клиента в этом узле и в других узлах. Во всех узлах, когда сервер занят, оценка того, какое обслуживание происходит, определяется сервером.

В системе нет никакой кооперации ни между этими тремя узлами, ни между двумя серверами. Однако, действия $pass_j$, $engage_j$ и *подача* (*serve*) происходят при кооперации между узлом и сервером. Значения, которые были заданы для параметров, указаны в таблице 1.

Модель системы, свободная от дефектов, имеет 368 состояний и 1570 переходов. Модель дефект-

$$Node_{100} \overset{def}{=} (in, 2\lambda).Node_{110} + (pass_1, 2e).Node_{100}$$

$$Node_{110} \overset{def}{=} (in, \lambda).Node_{111} + (engage_1, 2e).Node_{120}$$

$$Node_{111} \overset{def}{=} (engage_1, 2e).Node_{121}$$

$$Node_{120} \overset{def}{=} (in, \lambda).Node_{121} + (pass_1, 2e).Node_{120} + (serve, \perp).Node_{100}$$

$$Node_{120} \overset{def}{=} (engage_1, 2e).Node_{122} + (serve, \perp).Node_{110}$$

$$Node_{122} \overset{def}{=} (pass_1, 2e).Node_{122} + (serve, \perp).Node_{120}$$

$$Node_{j0} \overset{def}{=} (in, \lambda).Node_{j1} + (pass_j, e).Node_{j0} \quad j = 2,3$$

$$Node_{j1} \overset{def}{=} (engage_j, e).Node_{j2}$$

$$Node_{j2} \overset{def}{=} (serve, \perp).Node_{j0} + (pass_j, e).Node_{j2}$$

$$S \overset{def}{=} (walk, \omega/3).S_1 + (walk, \omega/3).S_2 + (walk, \omega/3).S_3$$

$$S_j \overset{def}{=} (pass_j, \perp).S + (engage_j, \perp).(serve, \mu).S \qquad 1 \le k \le 3$$

$$MSMQff \overset{def}{=} \left(Node_{100} \| Node_{20} \| Node_{30}\right)_{(engage_j, pass_j, serve_j)} \left(S \| S\right) / \{pass_j, engage_j\}, \ \text{ãäå } 1 \le j \le 3$$

Рис. 1: Асимметричная модель MSMQ с отмеченным узлом $Node_1$

$$Node'_{100} \overset{def}{=} (in, 2\lambda).Node'_{110} + (pass_1, 2e).Node'_{100}$$

$$Node'_{110} \overset{def}{=} (in, \lambda).Node'_{111} + (engage_1, e).Node'_{120} + (pass_1, e).Node'_{110}$$

$$Node'_{111} \overset{def}{=} (engage_1, 2e).Node'_{121}$$

$$Node'_{120} \overset{def}{=} (in, \lambda).Node'_{121} + (pass_1, 2e).Node'_{120} + (serve, \perp).Node'_{100}$$

$$Node'_{121} \overset{def}{=} (engage_1, e).Node'_{122} + (pass_1, e).Node'_{121} + (serve, \perp).Node'_{110}$$

$$Node'_{122} \overset{def}{=} (pass_1, 2e).Node'_{122} + (serve, \perp).Node'_{120}$$

$$MSMQwf \overset{def}{=} \left(Node'_{100} \| Node_{20} \| Node_{30}\right)_{(engage_j, pass_j, serve)} \left(S \| S\right) / \{pass_j, engage_j\}, \ \text{ãäå } 1 \le j \le 3$$

Рис. 2: Модифицированная версия модели с дефектным интерфейсом $Node_1$

Таблица 1: Значения параметров для моделей *MSMQff* и *MSMQwf*

in	$pass_j$ èëè $engage_j$	*serve*	*walk*
λ èëè 2λ	e èëè $2e$	μ	ω
0.1	$e = 50$	1.0	3,6,9,12,15

ной системы имеет то же самое число переходов 1570, но 1618 состояний. Среднее время ожидания в каждом узле было вычислено с использованием закона о малом числе испытаний, в то время как для каждой из моделей среднее время блуждания было различно.

Результаты, показанные на рис. 3 и 4, были сравнены, для того чтобы оценить эффект дефектного соединения. Узлы $Node_2$ и $Node_3$ имеют те же особенности, что только для узла $Node_2$ указаны на графиках.

Математическая модель зависимости времени ожидания W клиента в системе без дефекта от оценки блуждания ω, представленная на рис. 3, будет иметь вид:

для узла $Node_1$

$$W = 2.0742995\omega^{-0.9305069};$$

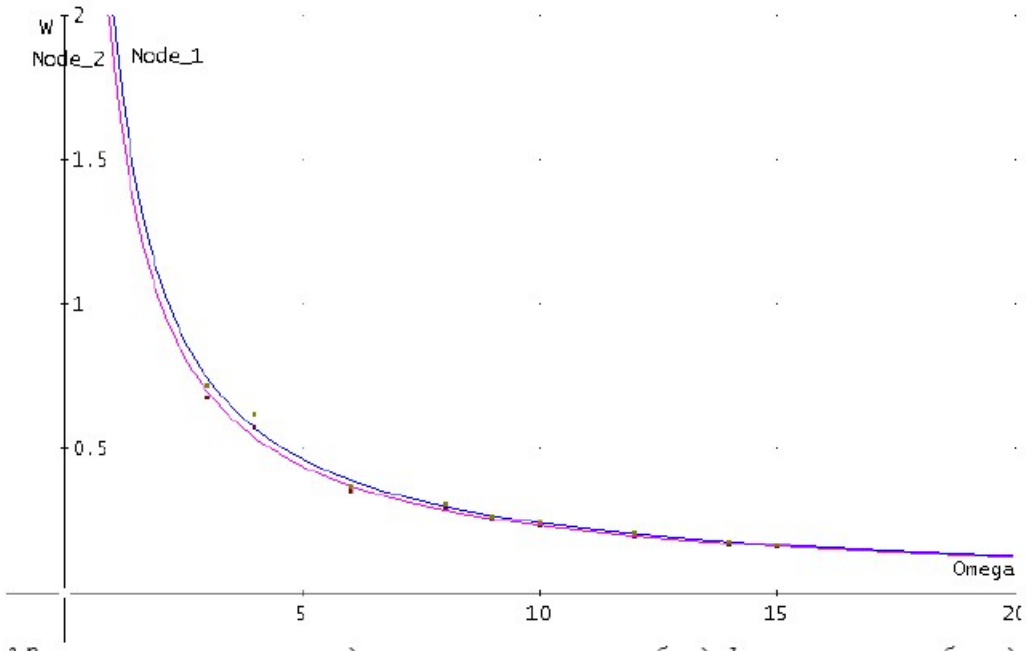

Рис. 3.Зависимость времени ожидания клиента в системе без дефекта от оценки блуждания.

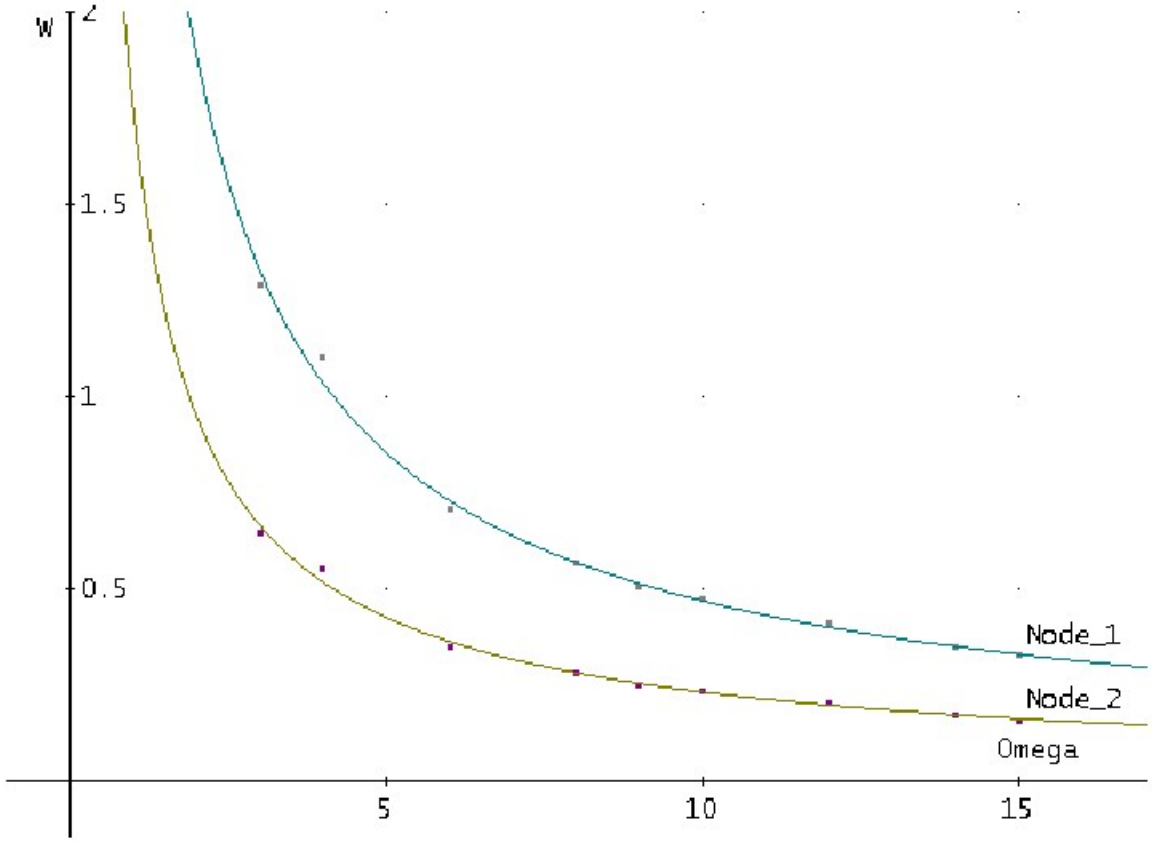

Рис. 4: Зависимость времени ожидания клиента в дефектной системе от оценки блуждания.

для узла *Node_2*

$$W = 1.90479\,\omega^{-0.911348}.$$

Математическая модель зависимости времени ожидания клиента W в дефектной системе от оценки блуждания ω, представленная на рис. 4, будет иметь вид:

для узла *Node_1*

$$W = 3.4495\,\omega^{-0.8666};$$

для узла *Node_2*

$$W = 1.7467\,\omega^{-0.876569}.$$

В системе, свободной от дефекта, *MSMQff* можно увидеть, что хотя предполагаемое время ожидания одинаково во всех узлах,

$$Node_{j0} \overset{def}{=} (in, \perp).Node_{j1} + (walk_E_j, e).Node_{j0} \qquad 1 \le j \le N$$

$$Node_{j1} \overset{def}{=} (walk_F_j, e).Node_{j2}$$

$$Node_{j2} \overset{def}{=} (serve_j, \perp).Node_{j0} + (walk_E_j, e).Node_{j2}$$

$$Gen_{j0} \overset{def}{=} (accept, \lambda).(pack, p).Gen_{j1}$$

$$Gen_{j1} \overset{def}{=} (in, d).((serve_j, w_1 \perp).Gen_{j1} + (serve_j, w_2 \perp).Gen_{j0})$$

где $w_1 = M - 1, w_2 = 1$ $(M - $ñðåäíåå ïàêåòîâ / ñîîáùåíèÿ $)$

$$Comp_j \overset{def}{=} Node_{j0} \underset{(in, serve_j)}{\triangleright\!\triangleleft} Gen_{j0}$$

$$S_j \overset{def}{=} (walk_E_j, \omega).S_{j\oplus 1} + (walk_F_j, \omega).(serve_j, \mu).S_{j\oplus 1},$$

ãäå $j \oplus 1 = 1$ êîãäà $j = N$

ãäå $N = 3$:

$$System \overset{def}{=} \left(Comp_1 \| Comp_2 \| Comp_3\right)_{(walk_F_j, walk_E_j, serve_j)} \left(S_1 \| S_1\right) / L, \quad \text{ãäå } 1 \le j \le N$$

$$L = \{accept, pack, walk_E_j, walk_F_j\}$$

Рис. 5: Модель PEPA расширенной системы MSMQ System

Таблица 2. Значения параметров для System

mean no. packets	*accept*	*pack*	*in*	*walk_Eè walk_F*	*serve*
M	λ	p	d	$\min(e, \omega)$	μ
5-25	0.05	0.1	20	$\min(50,10) = 10$	1.0

клиенты в узле $Node_1$ испытывают несколько более длинные задержки. Для всех узлов уменьшено среднее время ожидания, когда уменьшено ожидаемое среднее текущее время серверов. В случае дефектной системы *MSMQwf* предполагаемое время ожидания клиентов в узле $Node_2$ или $Node_3$ при дефекте совсем не изменяется. Однако предполагаемое время ожидания клиентов в узле $Node_1$ значительно увеличивается, особенно, когда оценка деятельности *блуждания* является замедленной.

2. Симметричная система MSMQ со случайным опросом с детальными узлами.

Последняя рассматриваемая модель показывает, что система MSMQ обычно вложена в большую систему, и демонстрирует, как легко это смоделировать в модели на языке PEPA. В [21] автор выдвигает на первый план вложение модели опроса в глобальную модель.

Рассмотрена симметричная система MSMQ с ёмкостью узла 1 и ограниченным обслуживанием, в которой разрешен обгон. Это можно классифицировать как $M/M/M/1/Q \times 1/L$ систему, подобную асимметричной модели, представленной в разделе 1, в случае $m = 1$. Однако теперь также считается, что компоненты системы ответственны за генерирование клиентов, которые достигают узлов. Предполагается, что каждый клиент - фактически пакет и часть сообщения. Для того, чтобы передать каждое сообщение, может быть необходимо несколько пакетов. Модель этой расширенной системы указана на рис.5.

Аспекты MSMQ системы подобны моделям, представленным в предыдущем разделе. Однако отметим, что деятельность *in* теперь просто представляет поставку пакета с генератора на буфер. Оценка этой деятельности определена генератором.

Предполагается, что процесс прибытия описывается законом Пуассона, с оценкой λ, поставляющей сообщения генератору о готовности их принять. Это представляется *принимающей* деятельностью ($accept$).

Каждое принятое сообщение разбито на *пакеты* ($pack$). Предполагается, что средняя длина сообщения - M пакетов. Пакеты поставляются в буфер по одному, с помощью *in* деятельности.

Когда закончилось обслуживание пакета, он будет заменен другим, пока все сообщение не будет отправлено. Тогда возобновляется процесс прибытия. Так как среднее число пакетов в сообщении - M, когда обслуживание пакета закончено, другой пакет уже доступен с вероятностью $M - 1/M$. Таким образом, пассивная

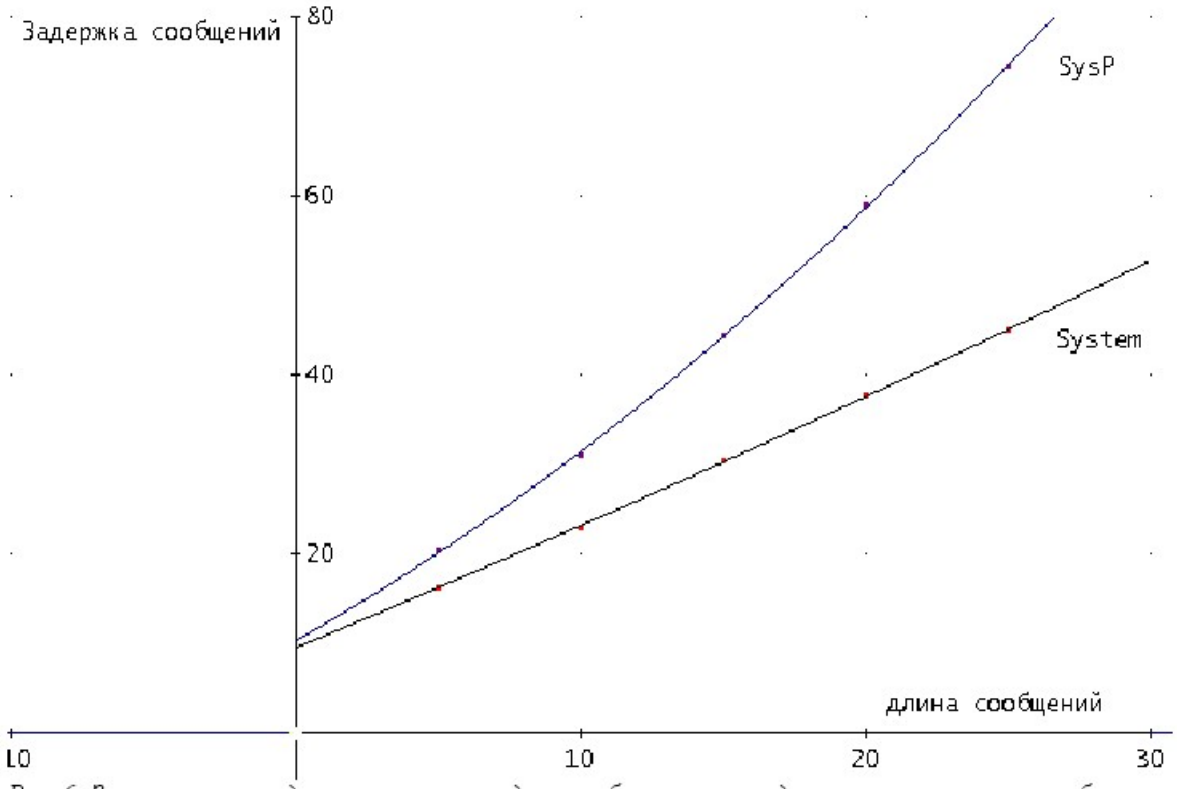

Рис. 6: Зависимость среднего времени передачи сообщения от среднего числа пакетов в сообщении.

деятельность *подачи* ($serve$) с этим результатом имеет вес $M-1$, тогда новое сообщение с вероятностью $1/M$ должно быть обработано прежде, чем доступен другой пакет. Итак, вес деятельности *подачи,* которая возобновляет процесс прибытия, равен 1.

Теперь узлы системы представлены сложными компонентами $Comp_j$, кооперацией «генератора» Gen_{j0} и «узла», $Node_{j0}$. Эти компоненты должны кооперировать действия in и $serve_j$. Они объединены друг с другом как серверы. Действия *блуждание* $walk_E_j$, *блуждание* $walk_F_j$, $serve_j$ требуют кооперации сервера и соответствующего соединения.

Это означает, что три компонента, Gen_j, $Node_j$ и S_j должны кооперироваться так, чтобы была достигнута $serve_j$ деятельность.

Модель имеет 888 состояний и 3858 переходов. Значения параметров указаны в таблице 5.

Поскольку система симметрична, особенности характеристики всех узлов одинаковы. Вместо среднего времени ожидания клиента, или пакета, в узле вычисляют среднее время передачи сообщения. Используем закон о малом числе испытаний, который сейчас применен к сложной паре узлов. Находим среднее число *сообщений* ($messages$) в узле N_m, отмечая, что найдется один представитель сообщения всякий раз, когда не разрешена *принимающая* ($accept$) деятельность. Поэтому полагаем полную деятельность равной 1, найдем R_{accept} и выводим, что $N_m = 1 - R_{accept}$. Находим пропускную способность сообщения, X_m, полагая вероятность деятельности $(serve, w_2, \perp)$ равной $1/M \times \mu$ всякий раз, когда посланы все пакеты сообщения. Предполагаемое время передачи сообщения в системе T_m, тогда $T_m = N_m / X_m$

Значение предполагаемого времени передачи, когда среднее число пакетов в сообщении M, изменяется в пределах от 5 до 30 (рис. 6.).
Математическая модель зависимости времени передачи сообщения W от среднего числа пакетов в сообщении n, представленная на рис. 6, будет иметь вид:

для System

$$W = 0.0038n^2 + 1.325n + 9.533;$$

для SysP

$$W = 0.0305n^2 + 1.805n + 10.33.$$

Это сравнение с предполагаемым временем передачи сообщений той же самой длины в родственной модели опроса *SysP*

$$SysP \stackrel{def}{=} \left(Comp_1 \| Comp_2 \| Comp_3\right)_{\left(walk_E_j, walk_F_j, serve_j\right)} \times$$

$$\times \left(S_1\right) / \left\{accept, pack, walk_E_j, walk_F_j\right\}.$$

Заключение. Анализ результатов полученных на основе изучения асимметричной и симметричной систем (MSMQ) со случайным опросом показывает практические преимущества создания мо-

делей по сравнению с простыми системами. Использование асимметричных и симметричных систем (MSMQ) со случайным опросом базируется на способности строго бигомотетичных компонент выполнять действия, приводящие к производным множествам. Эти производные множества в свою очередь сами строго бигомотетичны. Одним из методов упрощения модели могут быть отношения между строгим биподобием и основным марковским процессом. При упрощении модели находят компоненты, которые выполняют одинаковые действия. Для гарантии поведения компонент проверяют, действительно ли является тем же самым. С точки зрения алгебры процесса, если для одной компоненты найдется меньшее производное множество, то она может заменить другую компоненту в модели и привести к пространству состояний основного марковского процесса. Практическое применение данного подхода автоматического формирования модели с помощью асимметричных и симметричных систем (MSMQ) со случайным опросом заключается в динамическом планировании задач в параллельных и распределенных приложениях. Подобные подходы важны в системах, где модель должна обновляться постоянно и динамически в зависимости от текущего состояния ресурсов. Такой подход к формированию PEPA-модели надёжности основан на применении асимметричных и симметричных систем (MSMQ) со случайным опросом для смоделированных компонент системы. Так как строгое биподобие есть отношение соответствия для асимметричных и симметричных систем PEPA, то оно наиболее полно удовлетворяет условиям отношения строгого бимоделирования. Использование асимметричных и симметричных систем (MSMQ) со случайным опросом применено для упрощения пространства состояний одной из моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сорокин А.С.* Парадигмы программирования и алгебра процесса моделирования характеристик. // Вестник. КузГТУ, 2011. № 4 (86). Кемерово, С. 77-82.

2. *Сорокин А.С.* Алгебра процесса моделирования характеристик. //Вестник. КузГТУ, 2011. № 5(87) . Кемерово, С. 105-109.

3. *Сорокин А.С.* Модели симметричных систем опроса в теории организации очередей.// Вестник. КузГТУ., 2011. № 6(88) . Кемерово, С. 66-71.

4. *Сорокин А.С.* Моделирования характеристик систем мультисервер-мультиочереди MSMQ. // Вестник. КузГТУ, 2012. № 1(89) . Кемерово, С. 84-87.

5. *Aldinucci M, Danelutto M.* Algorithmic Skeletons Meeting Grids. // Parallel Computing, 32(7-8). 2006. p. 449–462.

6. *Hillston J.* A Compositional Approach to Performance Modelling. Cambridge University Press, 1996.

7. *Сорокин А.С.* Применение полумарковских процессов к определению характеристик надежности технологических схем. // Вестник. КузГТУ, 2005. № 1(45). Кемерово, С. 3 -9.

8. *Сорокин А.С.* Структурное моделирование надежности технологических систем с использованием скелетонов// Вестник. КузГТУ, 2008. № 4(68). Кемерово, С. 31-45.

9. *Сорокин А.С.* Математическое моделирование оценки надежности технологических систем// Вестник. КузГТУ, 2008. № 5(69). Кемерово, С. 28-37.

10. *Сорокин А.С.* Применение методов теории вероятностей к исследованию некоторых процессов производства.//Труды 4-ой междунар. конф. Кибернетика и технологии XXI века. Воронеж, 2003. С. 312-323.

11. *Сорокин А.С.* Марковские процессы в теории надежности технологических систем гидродобычи угля // Вестник. КузГТУ, 2008. № 1(65). Кемерово, С. 61-69.

12. *Коэн Дж., Боксма О.* Граничные задачи в теории массового обслуживания. М.: МИР, 1987.

13. *Королюк В.С., Томусяк А.А.* Описание функционирования резервированных систем посредством полумарковских процессов. //Кибернетика, вып.5, 1965.

14. *Сорокин А.С.* Системы линейных уравнений. Основные понятия анализа. Полумарковские процессы. (Гриф УМО). Изд. Сиб ГИУ. Новокузнецк, 1998. – 151 с.

15. *Marsan, M.A., Donatelli S., Neri F.* GSPN Models of Markovian Multiserver Multiqueue Systems.// Performance Evaluation, 11, 1990.

16. *Raith T.* Performance Analysis of Multibus Interconnection Networks in Distributed Systems.//In M. Akiyama, editor, Teletraffic Issues in an Advanced Information Society ITC-11. Elsevier, 1985.

17. *Morris R.J.T., Wang Y.T.* Some Results for Multiqueue Systems with Multiple Cyclic Servers. In H. Rudin and W. Bux, editors, //Performance of Computer Communication Systems. Elsevier, 1984.

18. *Kamal A.E., Hamacher V.C.* Approximate Analysis of Non-exhaustive Multiserver Polling Systems with Applications to Local Area Networks.//Computer Networks and ISDN Systems, 17(1), 1989.

19. *Yang Q., Ghosal D., Bhuyan L.* Performance Analysis of Multiple Token Ring and Multiple Slotted Ring Networks. //In Proceedings of Computer Network Symposium, Washington DC, 1986.

20. *Yuk T.I. , Palais J.C.* Analysis of Multichannel Token Ring Networks.//In Proceedings of the International Conference on Communication Systems, 1988.

21. *Takagi H.* Queueing Analysis of Polling Models: An Update.//In H. Takagi, editor, Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems. IFIP/North Holland, 1990.

22. *Choi H., Trivedi K.S.* Approximate Performance Models of Polling Systems Using Stochastic Petri Nets//In Proceedings of INFOCOM' *92*, 1992.

23. *Ibe O.C. , Trivedi K.S.* Stochastic Petri Net Models of Polling Systems.//IEEE Journal on Selected Areas of Communication, 8(9), 1990.

24. *Grillo D.* Polling Mechanism Models in Communication Systems - Some Application Examples.//In H. Takagi, editor, Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems. IFIP/North Holland, 1990.

25. *Marsan M. A., Donatelli S. , Neri F. , Rubino U.* On The Construction of Abstract GSPNs: An Exercise in Modelling. In J. Billington and W. Henderson, editors, Petri Nets and Performance Modelling.//IEEE, December 1991.

26. *Bunday B.D. , Khorram E.* The Efficiency of Uni-directionally Patrolled Machines with Two Robot Repairmen.//European Journal of Operational Research, 39(1),1989.

27. *Kurkova I.A., Malyshev V.A.* Martin boundary and elliptic curves// Markov Proc. Relat. Fields. 1998. V. 4. № 2. P. 203-272.

28. *Kurkova I.A.,Suhov Yu.M.* Malyshev's theory and JS-queues. Asymptotics of stationary probabilities// Ann. Appl. Probab. 2003. V. 13. № 4. P. 1313-1354.

29. *Malyshev V.A.* Networks and dynamical systems.//Adv. Appl. Prob. 1993. V. 25. P. 140-175.

Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ , г. Новокузнецк)
Тел.: 8(3843) 772459