

## ГРАНУЛОМЕТРИЯ

**УДК 519.21**

**А.В. Бирюков**

### О СЛУЧАЙНЫХ СТРУКТУРАХ

Большой класс случайных структур образуют дисперсные системы, состоящие из частиц различных размеров и форм. Их исследование составляет предмет аналитической гранулометрии, синтезирующей методы интегральной геометрии и геометрических вероятностей.

При случайном выборе частицы ее диаметр  $X$ , площадь поверхности  $S$  и объем  $V$  являются независимыми случайными величинами с непрерывными распределениями. Пусть  $f(x)$  – плотность распределения диаметра частиц,  $M_k$  – начальные моменты, равные интегралу от произведения  $x^k f(x)$  в границах от 0 до  $x$ . Тогда отношение

$$F_k = \frac{M_k(x)}{M_k}$$

представляет собой функцию гранулометрического состава, значение которой равно содержанию фракции ( $-x$ ) по характеристике, пропорциональной  $K$ -й степени диаметра частицы.

В частности, при  $K=3$  эта функция дает описание гранулометрического состава по суммарному объему частиц. Нетрудно заметить, что при фиксированной верхней границе интегрирования с увеличением показателя степени у диаметра значение функции гранулометрического состава убывает.

Меры сферичности частиц, определяемые отношениями  $S/x^2$  и  $V/x^3$ , в силу экстремальных свойств шара имеют симметричные распределения с центром рассеяния соответственно  $\pi/2$  и  $\pi/12$ . Отсюда с учетом независимости распределений получаем среднюю площадь поверхности частицы  $\pi/2 \cdot M_2$  и средний объем  $\pi/12 \cdot M_3$ . При этом удельная (на единицу объема) площадь поверхности частиц дисперсной системы, играющая важную роль в процессе дробления, составляет  $6 M_2/M_3$ .

Для получения эмпирических распределений и последующего построения аппроксимационных вероятностных моделей необходимо иметь репрезентативную выборку. Однако это чаще всего оказывается невозможным, поскольку измерениям бывают доступны лишь частицы на поверхности дисперсной системы, представленной укладкой частиц в некоторой трехмерной области. Это обстоятельство приводит к необходимости установления взаимосвязи между характеристиками всей дисперсной системы и множества

частиц на ее поверхности.

Обозначим через А множество всех частиц укладки, а через В – множество частиц на поверхности укладки. Пусть  $g(x)$  и  $N_k$  – плотность и моменты распределения диаметра частиц из множества В. Ввиду перекрытия одних частиц другими выборка из множества В дает заниженное содержание мелочи и, следовательно, завышенное содержание крупных частиц. Поэтому существует такое значение диаметра  $x_0$ , для которого  $f(x) < g(x)$  при  $x > x_0$  и  $f(x) > g(x)$  при  $x < x_0$ .

Этому условию отвечает соотношение  $f(x) = \frac{x_0}{x} g(x)$ . Его интегрирование с учетом свойства плотности распределения дает значение  $x_0 = M_1 = \frac{1}{N_{-1}}$ . Отсюда искомая взаимосвязь:

$$f(x) = \frac{g(x)}{x N_{-1}}, \quad M_k = \frac{N_{k-1}}{N_{-1}}.$$

В частности, по измерениям на поверхности укладки частиц имеем значение удельной площади поверхности частиц всей дисперсной системы, равное  $6 N_1/N_2$ .

Исследование дисперсных систем часто проводят с помощью анализа фотопланограмм. При этом источником ошибок здесь является несовпадение размера самой частицы с размером ее случайной проекции на фотопланограмме. Поскольку фотопланограмма содержит проекции частиц из множества В, то задача состоит в оценивании моментов  $N_k$  по измерениям на фотопланограмме.

В силу известного соотношения Коши площадь поверхности частицы приближенно равна учетверенной площади ее проекции. Переходя в этом соотношении к средним значениям, получим  $\frac{\pi}{2} N_2 = 4P$  или  $N_2 = \frac{8}{\pi} P$ ,

где  $P$  – средняя площадь проекции.

Для продуктов дробления геоматериалов типичным распределением диаметра частиц является экспоненциальный закон с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{M_1} \exp\left(-\frac{x}{M_1}\right)$$

и моментами  $M_k = K! M^k$ . В этом случае для частиц из множества В имеем

$$g(x) = \frac{N_{-1} \exp\left(\frac{-x}{M_1}\right)}{M_1}$$

и, следовательно,

$$N_k = \frac{(k+1)!}{N_{-1}^k}.$$

Таким образом

$$M_1 = 2\left(\frac{P}{3\pi}\right)^{1/2} \approx \frac{2}{3}P^{1/2},$$

т.е. по измерениям площадей проекций частиц на фотопланограмме имеет оценку параметра распределения диаметра частиц всей трехмерной укладки.

Другая интегрально-геометрическая задача заключается в восстановлении геометрических характеристик частиц по их сечениям случайной плоскостью. С такой задачей связано исследование дисперсной системы, погруженной в твердую непрозрачную среду (как, например, при анализе петрографических шлифов).

Для частиц произвольной формы этот вопрос является открытым. Вместе с тем для сферических частиц получены точные соотношения между моментами  $M_k$  и моментами распределения диаметра сечения  $D_k$ . В частности,

$$M_1 = \frac{\pi}{3D_1}, \quad M_2 = \frac{D_1}{D_{-1}},$$

что совпадает с полученными выше соотношениями

$$M_1 = \frac{1}{N_{-1}}, \quad M_2 = \frac{N_1}{N_{-1}}$$

для частиц из множества А и В. Это обстоятельство подтверждает правомерность использования полученной формулы  $M_k = \frac{N_{k-1}}{N_{-1}}$  при

анализе случайных сечений дисперсной системы. Отметим существенное преимущество этой формулы: она получена для частиц со случайной вариацией формы.

Имея картину сечений дисперсной системы, можно также получить оценку плотности укладки частиц. Пусть  $H(t)$  и  $R(t)$  – соответственно число частиц в единичном кубе с диаметром из интервала  $(t; 1)$  и число сечений в единичном квадрате с диаметром из того же интервала. Тогда функцию  $H(t)$  можно найти интегрированием

$$\frac{-2}{\pi} R'(u) \\ \frac{\pi}{(u^2 - t^2)^{1/2}}$$

по параметру  $u$  в границах  $t$  от 0 до 1. При этом, если  $r_2$  – плотность укладки сечений, то, например, для аппроксимации  $R(t) = R(0)(1-t^2)$

получим соотношение  $r_1 = \frac{r_2}{3}$ .

С каждой дисперсной системой связано случайное множество точек. Если число точек в области с единичной мерой есть случайная величина со средним значением  $\lambda$ , то это среднее значение называется плотностью множества. В том случае, когда вероятность встретить в единичной области  $n$  точек равна  $\frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!}$ ,

множество называется пуассоновским.

Пусть с каждой частицей дисперсной системы каким-либо образом связана точка, которую назовем центром частицы (центр тяжести, центр вписанного шара и т.д.), и пусть  $\lambda$  – плотность полученного точечного множества. Обозначим через  $E$  объем области, занимаемой дисперсной системой, а через  $W$  – суммарный объем всех частиц. Тогда число частиц равно  $W / \frac{\pi}{12} M_3$  и,

следовательно,  $\lambda = \frac{12W}{\pi M_3 E}$  или при известной

плотности укладки  $r = \frac{W}{E}$  получим  $\lambda = \frac{12r}{\pi M_3}$ .

Поскольку для экспоненциального распределения  $M_3 = 6M_1^3$ , то  $\lambda = \frac{2r}{\pi M_1^3}$ .

Аналогичным путем можно получить плотность центров крупных частиц с диаметром  $x > x_0$ :  $\lambda(x_0) = [1 - F_0(x_0)]$ . Здесь  $F_0(x_0)$  – содержание фракции  $(+x_0)$  по числу частиц. Для пуассоновского множества центров вероятность того, что в области с объемом  $G$  нет крупных частиц, равна  $\exp\left[-\frac{\lambda(x_0)}{G}\right]$ .

Дисперсными системами с плотной упаковкой частиц ( $r = 1$ ) являются случайные разбиения области пуассоновским множеством плоскостей, т.е. таких плоскостей, для которых соответствующее множество точек параметрического пространства является пуассоновская с некоторой плотностью  $\lambda$ . Здесь параметр  $\lambda$  равен среднему числу плоскостей, пересекающих линейный отрезок единичной длины и произвольной ориентации.

Таким образом некоторая область пространства разбивается на выпуклые многогранники. Пусть  $C_0, C_1, C_2$  – среднее число вершин, ребер и граней многогранника, а  $L, S, V$  – средние значения его суммарной длины ребер, площади поверхности и объема. Тогда

$$C_0 = 8, C_1 = 12, C_2 = 6, \\ L = \frac{12}{\lambda}, S = \frac{24}{\pi \lambda^2}, V = \frac{6}{\pi \lambda^3}.$$

Если  $m$  – число многогранников, а  $m_0, m_1, m_2$  – их суммарное число вершин, ребер и граней, то  $m_0 = m, m_1 = m_2 = 3m$ . Сравнивая суммарную длину ребер с их количеством, находим, что средняя

длина ребер равна  $1/\lambda$ .

Из суммарного объема многогранников  $\frac{6t}{\pi\lambda^3}$  находим плотность множества вершин, равную  $\frac{\pi\lambda^3}{6}$ . Для вершин, лежащих на каждой плоскости разбиения, имеем значение  $\frac{\pi\lambda^2}{12}$ .

Рассмотрим теперь другой класс случайных структур, подставленный случайными графами  $A(n, k)$  с  $n$  вершинами и  $k$  ребрами. Пусть вероятность смежности двух вершин равна 0,5. Поскольку у полного графа число ребер равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , то у случайного графа с данной вероятностью смежности среднее число ребер составляет  $\frac{n(n-1)}{4}$ .

Характеристикой алгоритмической сложности случайного графа служит его энтропия, определяемая следующим образом. Рассмотрим у случайного графа все его подграфы третьего порядка (рис.1), число которых составляет  $n(n-1)(n-2)/6$ . Среди них неизоморфными являются цикл, цепь из двух звеньев, ребро и вершина, три попарно несмежных вершины



Рис.1

Если относительные частоты (оценки вероятностей) каждого из приведенных подграфов равны  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , то энтропию данного распределения

$$H = \frac{P_1 \log_2 P_1 + P_2 \log_2 P_2 + P_3 \log_2 P_3 + P_4 \log_2 P_4}{2}$$

назовем энтропией случайного графа. Очевидно, что  $H=1$  имеет графы с равномерным распределением  $P_1=P_2=P_3=P_4=1/4$ .

Пусть имеется случайный граф  $A(6, 7)$  с числом ребер, составляющим половину числа ребер соответствующего полного графа. Количество таких графов равно 24. Вычисление их энтропии дает следующие результаты:

0,96	0,92	0,92	0,92	0,91	0,90	0,90	0,90
0,89	0,84	0,84	0,84	0,80	0,80	0,80	0,80
0,80	0,72	0,70	0,70	0,69	0,68	0,58	0,36

Первые и последние три графа из этой серии представлены на рис.2.

Полученная выборка из 24 значений энтропии имеет среднее 0,80, стандарт 0,132 и размах 0,6.

Отношение размаха к стандарту, равное 4,54, принадлежит критическому интервалу (3,3; 4,7)

при проверке выборки на нормальность. Следовательно, полученные значения энтропии можно считать принадлежащими нормальному распределенной генеральной совокупности.

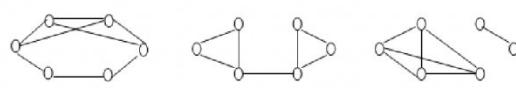
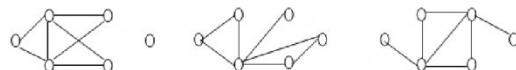


Рис.2

Класс планарных графов порождают случайные разбиения плоскости на выпуклые многоугольники. Рассмотрим, в частности, упаковку плоскости правильными треугольниками. В этом случае степени всех вершин графа равны 6. Для области, содержащей  $n$  вершин,

$$P_1 = \frac{12}{(n-1)(n-2)}, P_2 = \frac{54}{(n-1)(n-2)},$$

$$P_3 = \frac{18(n-8)}{(n-1)(n-2)}, P_4 = 1 - (P_1 + P_2 + P_3).$$

Например, для  $n = 20, 50, 100, 500$ , имеем:

$P_1$	0,03	0,00	0,00	0,00
$P_2$	0,16	0,02	0,01	0,00
$P_3$	0,63	0,32	0,17	0,04
$P_4$	0,18	0,66	0,82	0,96
$H$	0,72	0,55	0,36	0,11

Аналогичная картина соответствует разбиению плоскости на квадратные ячейки. Здесь степень каждой вершины графа равна 4. При этом

$$P_1 = 0, P_2 = \frac{72}{(n-1)(n-2)}, P_3 = \frac{12(n-8)}{(n-1)(n-2)},$$

$P_4 = 1 - (P_2 + P_3)$ . Для тех же значений  $n$  получим:

$P_2$	0,21	0,03	0,01	0,00
$P_3$	0,42	0,21	0,11	0,02
$P_4$	0,37	0,76	0,88	0,98
$H$	0,76	0,47	0,29	0,08

В обоих случаях асимптотическое поведение энтропии одинаково: при стремлении числа вершин графа к бесконечности его энтропия стремится к нулю. Это свойство энтропии сохраняется при разбиениях пространства любой размерности, поскольку число ребер графа пропорционально числу его вершин. Так, например, в трехмерном случае для кубической решетки и соответствующего графа  $A(n, 3n)$

$$P_1 = 0, P_2 = \frac{18(n-10)}{(n-1)(n-2)},$$

$$P_3 = \frac{18(n-10)}{(n-1)(n-2)}, P_4 = 1 - \frac{36(n-11)}{(n-1)(n-2)}.$$

□Автор статьи

Бирюков  
Альберт Петрович  
-докт.техн.наук, проф., зав.каф.  
высшей математики