

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 536.24

Ю.В. Видин, Д.И. Иванов

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЧЕРЕЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ СТЕНКУ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

Аналитический расчет процесса нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку связан с задачей нахождения собственных чисел на основе достаточного сложного характеристического уравнения [1]

$$\frac{Bi_1 J_0(\mu) + \mu J_1(\mu)}{Bi_1 Y_0(\mu) + \mu Y_1(\mu)} = \frac{Bi_2 J_0(\psi^* \mu) - \mu J_1(\psi^* \mu)}{Bi_2 Y_0(\psi^* \mu) - \mu Y_1(\psi^* \mu)} \quad (1)$$

где $Bi_1 = a_1 R_1 / \lambda$, $Bi_2 = a_2 R_2 / \lambda$ – безразмерные числа подобия (числа Био),

$\psi = r / R_1$ – безразмерная радиальная координата ($1 \leq \psi \leq \psi^*$),

$$\psi^* = R_2 / R_1.$$

В связи с большим числом параметров в зависимости (1) составить таблицу корней весьма затруднительно.

Поэтому первоначально имеет смысл установить возможные пределы для искомого числа μ_n . С этой целью рассмотрим частный случай уравнения (1), а именно, примем, что $Bi_1 \rightarrow \infty$ и $Bi_2 \rightarrow \infty$, т.е. на внутренней и внешней поверхностях полого цилиндрического тела действуют граничные условия первого рода. Тогда формула (1) вырождается в соотношение

$$\frac{J_0(\mu)}{Y_0(\mu)} = \frac{J_0(\psi^* \mu)}{Y_0(\psi^* \mu)}, \quad (2)$$

Если предположить, что искомые корни $\mu_n \geq 3$, то допустимо аппроксимировать функции Бесселя $J_0(\mu)$, $Y_0(\mu)$, $J_0(\psi^* \mu)$ и $Y_0(\psi^* \mu)$ следующими приближениями [2]

$$J_0(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} f_0 \cos \theta_0, \quad (3)$$

$$Y_0(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} f_0 \sin \theta_0, \quad (4)$$

где θ_0 описывается выражением

$$\theta_0 = \mu - 0.78539816 - 0.04166392(3/\mu) - 0.00003954(3/\mu)^2 + 0.00262573(3/\mu)^3 -$$

$$- 0.00054125(3/\mu)^4 - 0.00029333(3/\mu)^5 + 0.0001358(3/\mu)^6 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| < 7 \cdot 10^{-7} \quad (5)$$

$$J_0(\psi^* \mu) = \frac{1}{\sqrt{\psi^* \mu}} f_0^* \cos \theta_0^*, \quad (6)$$

$$Y_0(\psi^* \mu) = \frac{1}{\sqrt{\psi^* \mu}} f_0^* \sin \theta_0^*. \quad (7)$$

В зависимостях (6) и (7) величины θ_0^* рассчитываются по формуле аналогичной (5), в которой необходимо только μ заменить на комплекс $\psi^* \mu$.

С учетом (3), (4), (6) и (7) уравнение (2) запишется в виде

$$\frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = \frac{\cos \theta_0^*}{\sin \theta_0^*}, \quad (8)$$

Согласно [3] зависимость (8) эквивалентна выражению

$$\sin(\theta_0^* - \theta_0) = 0, \quad (9)$$

Отсюда вытекает, что

$$\theta_0^* - \theta_0 = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Подставив в (10) вместо θ_0 соотношение (5) и аналогичное для θ_0^* и ограничиваясь в них первыми тремя слагаемыми, составим квадратное уравнение для вычисления μ_n

$$\mu_n^2 - \frac{n\pi}{\psi^* - 1} \mu_n + \frac{0,125}{\psi^*} = 0, \quad (11)$$

Решая это уравнение, находим

$$\mu_n = \frac{n\pi}{2(\psi^* - 1)} + \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{4(\psi^* - 1)^2} - \frac{0,125}{\psi^*}}, \quad (12)$$

В таблице приведены значения первых трех собственных чисел μ_n для $\psi^* = 1,1$; $\psi^* = 1,2$; $\psi^* = 1,5$; $\psi^* = 2,0$, рассчитанные по описанной выше методике и приведенные в [2]. Здесь видно, что расхождение проявляется лишь в 3-ем знаке после запятой, даже для собственных чисел μ близких к 3.

Корни характеристического уравнения μ_n

μ_1		μ_2		μ_3	
Расчет по методике [2]	Расчет по формуле (12)	Расчет по методике [2]	Расчет по формуле (12)	Расчет по методике [2]	Расчет по формуле (12)
$\psi^*=1,1$					
31,41232	31,41231	62,83004	62,83004	94,24657	94,24657
$\psi^*=1,2$					
15,70136	15,70133	31,41261	31,41261	47,12168	47,12168
$\psi^*=1,5$					
6,26998	6,26989	12,55978	12,55974	18,84515	18,84513
$\psi^*=2,0$					
3,12303	3,12157	6,27344	6,27322	9,41821	9,41814

Выводы

Произведен расчет собственных чисел в задаче нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку при граничных условиях первого рода на внешней и внутренней поверхностях ци-

линдрического тела. Точность расчета повышается с уменьшением толщины стенки (уменьшением параметра ψ^*) и увеличением порядкового номера n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. - М.: Наука, 1979. – 832 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов – М.: Наука, 1965. – 608 с.

□ Авторы статьи:

Видин
Юрий Владимирович,
канд. техн. наук, профессор
каф. теплотехники и гидрогазодинамики
теплоэнергетического факультета
Сибирского федерального университета
(г. Красноярск).
E-mail: idi86@inbox.ru.

Иванов
Дмитрий Иванович,
аспирант каф. теплотехники и
гидрогазодинамики теплоэнергетического
факультета Сибирского федерального
университета
(г. Красноярск).
E-mail: idi86@inbox.ru.