

## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

**УДК 656.13**

**М.Е. Корягин, В.А. Чекменев**

### **ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГРУЗОПОТОКАМИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ СНАБЖЕНИИ ДВУХ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ**

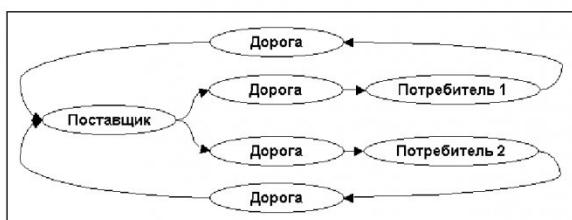
#### **Введение**

Современная экономика требует от предприятий более тесного взаимодействия с потребителями, строгого учета как внутрипроизводственных затрат, так и интересов потребителей. Основное звено, связывающее технологические процессы внутри предприятия и между предприятиями – транспортные системы. Расходы на перевозку грузов составляют до 70% затрат в конечной цене продукта и до 95% затрат времени в производственном цикле.

В качестве модели рассматриваются марковские сети массового обслуживания (СМО). Большое внимание уделено оптимизации этих сетей – с учетом загрузки поставщика и потребителей. Модели подкреплены алгоритмами поиска оптимальных состава транспортного парка и способов оперативного управления автомобилями (диспетчеризация), а также примерами применения моделей в практических транспортных системах снабжения.

Важным элементом исследования транспортных систем является определение эффективности использования информационных систем на транспорте. Показано, что информация о перемещении транспортных средств может оптимизировать работу диспетчерских систем, т.е. лучше удовлетворить интересы потребителей, тем же транспортным парком, или снизить транспортные расходы.

Рассмотрим задачу с одним поставщиком и двумя потребителями, соединенными дорожной сетью (рис. 1).



*Rис. 1*

В такой системе возникает необходимость в разделении транспорта, выходящего от поставщика двум потребителям. Рассмотрено 3 подхода:

1) отправлять транспортные средства случайно с вероятностью  $p$  одному потребителю и с

вероятностью  $1-p$  другому;

2) прикрепить транспортные средства к каждому потребителю и в порядке их поступления загружать и отправлять своему потребителю;

3) транспортное средство отправлять тому потребителю, у которого в данный момент на разгрузке и на пути от поставщика транспортных средств меньше.

Проведено сравнение этих способов разделения транспортных потоков, исследованы технические особенности их использования. В качестве примера использования таких способов управления транспортом рассмотрено строительство и ремонт дорог.

Для первого способа рассмотрена задача поиска параметра  $p$  для определения транспортного парка:

1) гарантирующего фиксированную загрузку поставщика и потребителей;

2) сокращающего суммарные расходы поставщика и потребителей;

В качестве примера рассмотрена добыча полезных ископаемых открытым способом (работа экскаватора).

#### **Математическая модель**

В качестве модели рассматриваем замкнутые марковские СМО. Для описания процесса погрузки у поставщика вводится термин *центральный узел обслуживания*, для разгрузки у потребителей – *периферийные узлы*, для представления дорожной сети, по которой осуществляется перевозка – *промежуточные узлы*. Погрузка и разгрузка в таких системах являются «узкими местами» системы, поскольку, как правило, одновременно загружать-разгружать может только одно транспортное средство, поэтому центральный и периферийные узлы являются одноканальными системами массового обслуживания. Напротив, на дорожной сети одновременно может находиться большое количество транспортных средств, причем они, как правило, имеют возможности для обгона, поэтому промежуточные узлы являются бесконечноканальными системами массового обслуживания.

Время обслуживания на узлах подчинено экспоненциальному распределению. Особое внимание уделено дисциплинам обслуживания.

### Обслуживание двух периферийных узлов через промежуточные узлы со статическим приоритетом

Пусть  $N$  – количество заявок, находящихся в системе. Узлы 0 (погрузки), 1 и 2 (разгрузки) – системы, независящие от нагрузки (однолинейные), с интенсивностями обслуживания  $1/\tau_i$  ( $i=0,1,2$ ) и бесконечной очередью. Узлы 3 - 6 (дорожная сеть) системы типа IS (бесконечнолинейные), с интенсивностями  $1/\tau_i$  ( $i=3\div 6$ ) (рис. 2).

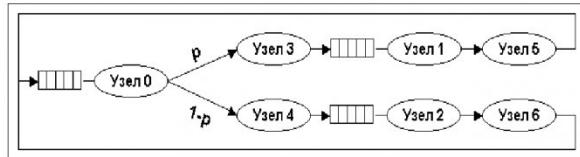


Рис. 2

С узла 0 с вероятностью  $p$  заявки отправляются на узел 3 (первому потребителю), а с вероятностью  $1-p$  на узел 4 (второму).

#### Практическая интерпретация

Организовать работу диспетчера по этой модели можно при помощи генератора случайных чисел и после погрузки у поставщика отправлять транспортное средство первому при сгенерированном значении меньшим  $p$ , иначе – второму потребителю.

Множество состояний сети  $n=(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$  ( $n_i$  - количество заявок в узле  $i$ )

$$n \in S(N), n : n_i \geq 0, i = 1..6, \sum_{i=0}^6 n_i = N.$$

Используя то, что сеть локально сбалансирована [1], стационарную вероятность состояния сети можно вычислить как

$$p(n) = \frac{1}{G(N,p)} \tau_0^{n_0} (p \times \tau_1)^{n_1} ((1-p) \times \tau_2)^{n_2} \times \\ \times \frac{(p \times \tau_3)^{n_3}}{n_3!} \frac{(p \times \tau_4)^{n_4}}{n_4!} \frac{((1-p) \times \tau_5)^{n_5}}{n_5!} \frac{((1-p) \times \tau_6)^{n_6}}{n_6!}$$

где  $G(N,p)$  - нормировочный коэффициент находится из условия:

$$I = \sum_{n \in S(N)} p(n).$$

Отметим, что  $G(N,p)$  - полином степени  $N$  по  $p$ .

Упростим формулу для вычисления:

$$G(N,p) = \\ = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \left\{ \begin{array}{l} (p \tau_1)^{i-k} ((1-p) \tau_2)^{j-l} \tau_0^{N-i-j} \times \\ \times \frac{(p(\tau_3 + \tau_4))^k}{k!} \frac{((1-p)(\tau_5 + \tau_6))^l}{l!} \end{array} \right\} \\ = \sum_{j=0}^N p^j \sum_{s=0}^j \sum_{m=j-s}^{N-s} \sum_{k=0}^s \sum_{l=0}^m \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^{j-s} m!}{(j-s)!(m-j+s)!} \tau_1^{s-k} \tau_2^{m-l} \times \\ \times \frac{(\tau_3 + \tau_4)^k}{k!} \frac{(\tau_5 + \tau_6)^l}{l!} \tau_0^{N-m-s} \end{array} \right\}$$

### Обслуживание двух периферийных узлов через промежуточные узлы с разделением заявок

Один из вариантов распределения заявок - закрепить их за периферийными узлами и обслуживать на центральном узле в порядке поступления. Тогда  $N_1$  - число заявок для Узла 1 и  $N_2 = N - N_1$  для Узла 2.

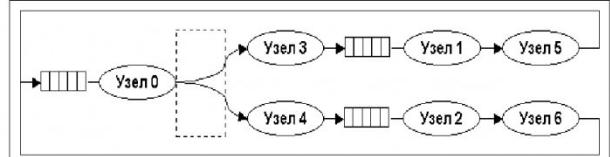


Рис. 3

Множество состояний сети  $n=(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$  ( $n_i$  - число заявок в узле  $i$ )

$$n \in S(N), n : n_i \geq 0, i = 1..6, \sum_{i=0}^6 n_i = N, \\ n_2 + n_4 + n_6 \leq N_2.$$

Такая сеть также является локально сбалансированной [1], поэтому стационарная вероятность состояния сети:

$$p(n) = \frac{1}{G(N)} \tau_0^{n_0} \tau_1^{n_1} \tau_2^{n_2} \frac{\tau_3^{n_3}}{n_3!} \frac{\tau_4^{n_4}}{n_4!} \frac{\tau_5^{n_5}}{n_5!} \frac{\tau_6^{n_6}}{n_6!}$$

Нормировочный коэффициент [1,2]:

$$G(N) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{l=0}^{N_1-i} \tau_1^i \frac{(\tau_3 + \tau_5)^l}{l!} \sum_{j=0}^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2-j} \tau_2^j \frac{(\tau_4 + \tau_6)^m}{m!} \tau_0^{N-i-j}$$

Стационарная вероятность простого (доля времени простоя) Узла 0:

$$P_N(n_0 = 0) = 1 - \tau_0 \times \\ \times \frac{\sum_{i=0}^{N_1} \tau_1^i \frac{(\tau_3 + \tau_5)^{N_2-i}}{(N_2-i)!} \sum_{j=0}^{N_2} \tau_2^j \frac{(\tau_4 + \tau_6)^{N_2-j}}{(N_2-j)!}}{G(N)}$$

### Обслуживание двух периферийных узлов через промежуточные узлы с динамическим приоритетом

Также для системы на рис. 3 можно установить динамический приоритет, по которому заявки отправляются на тот периферийный узел, у которого в сумме в очереди и на промежуточном узле заявок меньше. Если число заявок совпадает, то с одинаковой вероятностью заявка может быть отправлена на любой периферийный узел. Для определения приоритета введем коэффициент  $\alpha$ .

Множество состояний сети  $n=(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$  ( $n_i$  - число заявок в узле  $i$ )

$$n \in S(N), n : n_i \geq 0, i = 1..6, \sum_{i=0}^6 n_i = N,$$

$$\alpha n_1 + n_3 \leq \frac{N}{\alpha + 1} + 1, n_2 + n_4 \leq \frac{\alpha N}{\alpha + 1} + 1.$$

(в некоторых из этих состояний система не может

прийти).

В отличие от предыдущих двух систем эта система не локальноисбалансированна. Поэтому для поиска решения запишем систему уравнения глобального баланса. Причем удобнее записать переходы из каждого состояния  $(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$  в состояние

$(n_0, n_1+1, n_2, n_3-1, n_4, n_5, n_6)$  с интенсивностью  $n_3/\tau_3$ ,

в  $(n_0, n_1-1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6)$  с интенсивностью  $1/\tau_1$ ,

в  $(n_0+1, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5-1, n_6)$  с интенсивностью  $n_5/\tau_5$ ,

в  $(n_0, n_1, n_2, +1, n_3, n_4-1, n_5, n_6)$  с интенсивностью  $n_4/\tau_4$ ,

в  $(n_0, n_1, n_2, -1, n_3, n_4, n_5, n_6+1)$  с интенсивностью  $1/\tau_2$ ,

в  $(n_0+1, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6-1)$  с интенсивностью  $n_6/\tau_6$ ,

если  $\alpha(n_1+n_3) > n_2 + n_4$  с интенсивностью  $1/\tau_0$  в  $(n_0-1, n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6)$ ,

если  $\alpha(n_1+n_3) < n_2 + n_4$  с интенсивностью  $1/\tau_0$  в  $(n_0-1, n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6)$ ,

если  $\alpha(n_1+n_3) = n_2 + n_4$  с интенсивностью и вероятностью  $\frac{1}{(\alpha+1)\tau_0}$  в состояния  $(n_0-1,$

$n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6)$  и  $\frac{\alpha}{(\alpha+1)\tau_0} (n_0-1, n_1,$

$n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6)$ .

По полученным переходам построим СЛАУ, в которой одно из уравнений заменяется на условие нормировки вероятностей.

### Оптимизация перевозок при статическом приоритете

Характеристики системы, которые можно получить для первой модели [2]:

время простоя Узла 0 в установившемся режиме за период  $T$

$$Q_0(N, p) = T \times P_N(n_0 = 0),$$

где

$$P_N(n_0 = 0) = 1 - \tau_0 \frac{G(N-1, p)}{G(N, p)}$$

- стационарная вероятность простоя Узла 0;

время простоя Узла 1 в установившемся режиме за период  $T$

$$Q_1(N, p) = T \times P_N(n_1 = 0),$$

где

$$P_N(n_1 = 0) = 1 - p \times \tau_1 \frac{G(N-1, p)}{G(N, p)}$$

- стационарная вероятность простоя Узла 1;

время простоя Узла 2 в установившемся режиме за период  $T$

$$Q_2(N, p) = T \times P_N(n_2 = 0),$$

где

$$P_N(n_2 = 0) = 1 - (1-p) \times \tau_2 \frac{G(N-1, p)}{G(N, p)}$$

- стационарная вероятность простоя Узла 2.

Рассмотрим два критерия оптимизации:

1) при помощи свертки

$$F(N, p) = C_0 Q_0(N, p) + C_1 Q_1(N, p) + C_2 Q_2(N, p).$$

Тогда

$$F(N, p) = T \{ C_0 + C_1 + C_2 - \frac{1}{G(N, p)} \times \\ \times [C_0 \tau_0 G(N-1, p) + C_1 p \tau_1 G(N-1, p) + \\ + C_2 (1-p) \tau_2 G(N-1, p)] \}$$

- отношение полиномов степени  $N$ . Причем

$$G(N, p) \neq 0, p \in [0, 1].$$

При фиксированном количестве заявок необходимо найти распределение потока заявок ( $p$ ) между Узлами 3 и 4. Затем можно воспользоваться численными методами для поиска минимума критерия в интервале  $[0, 1]$ . Задачу можно свести к поиску корней уравнения степени  $2N-1$ , если продифференцировать  $F(N, p)$ ;

2) найти такое минимальное количество заявок и распределение потоков ( $p$ ), чтобы обеспечить выполнение ограничений:

a)  $Q_0(N, p) \leq \bar{t}_0$  на время простоя Узла 0:

b)  $Q_1(N, p) \leq \bar{t}_1$  на время простоя Узла 1:

c)  $Q_2(N, p) \leq \bar{t}_2$  на время простоя Узла 2.

Рассмотрим задачу существования  $p$ , удовлетворяющую всем трем ограничениям для фиксированного числа заявок.

Задача имеет решение, когда выполняются ограничения для неограниченного числа заявок :

$$\bar{t}_0 \geq \frac{\bar{t}_0}{T} \max\{p \tau_1, (1-p) \tau_2\};$$

$$p \tau_1 \geq \frac{\bar{t}_1}{T} \max\{\bar{t}_0, (1-p) \tau_2\};$$

$$(1-p) \tau_2 \geq \frac{\bar{t}_2}{T} \max\{\bar{t}_0, p \tau_1\}$$

или

$$\max\left\{\frac{\bar{t}_1 \tau_0}{T \tau_1}, 1 - \frac{T \tau_0}{\bar{t}_0 \tau_2}, \frac{\bar{t}_1 \tau_2}{\bar{t}_1 \tau_2 + T \tau_1}\right\} <$$

$$< \min\left\{\frac{T \tau_0}{\bar{t}_0 \tau_1}, 1 - \frac{\bar{t}_2 \tau_0}{T \tau_2}, \frac{T \tau_2}{\bar{t}_2 \tau_1 + T \tau_2}\right\}$$

Используя монотонность  $Q_1$   $Q_2$  [2] по ограничениям b) и c), можно найти границы для  $p$ .

Рассмотрим процедуру поиска решения:

0)  $N=1$

1)  $N=N+1$

2) Из уравнения

$p \times \tau_1 \times G(N-1, p) + \bar{t}_1 \times G(N, p) = T$   
находится нижняя граница  $\underline{p}$ . Из уравнения  
 $(1-p) \times \tau_2 \times G(N-1, p) + \bar{t}_2 \times G(N, p) = T$   
- верхняя граница  $\bar{p}$ . Затем при  $\underline{p} \geq \bar{p}$  переход к пункту 1.

3) В интервале  $[\underline{p}, \bar{p}]$ , найти максимум функции

$$F = 1 - \tau_0 \frac{G(N-1, p)}{G(N, p)}.$$

Если  $F > \frac{\bar{t}_0}{T}$ , перейти к пункту 1, иначе закончить вычисления.

#### Пример. Добыча полезных ископаемых открытым способом

Рассмотрим работу экскаватора. Экскаватор работает на два направления: склад и отвал. Соответственно, вероятность отправки самосвала на отвал составляет 20%. Время, которое самосвал затрачивает на переезд от экскаватора до отвала (до склада) и обратно, составляет 40 минут. Время на погрузку одного самосвала – 3 минуты, на разгрузку – 2 минуты. На рис. 4 представлена зависимость простоев экскаватора и самосвалов от количества транспортных средств, применяемых на разрезе. Например, чтобы обеспечить загрузку экскаватора на 90%, необходимо 25 самосвалов, при этом простои каждого из них в ожидании по-

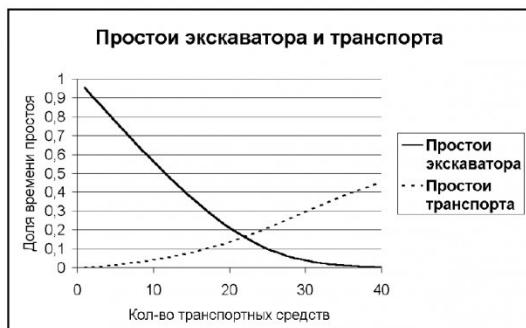


Рис. 4

гружи составят 21% (или 12 минут).

#### Диспетчеризация поставок двум потребителям

Исследуем три системы управления обслужи-

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания – М: Машиностроение, 1988. – 188 с.
2. Корягин М.Е., Чекменев В.А. Оптимизация распределения грузопотоков по транспортной сети. Вестн. Томского ун-та, № 1 (I), Материалы 4-й Всеросс. конф. с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Томск, 2002, с. 73-77.

□ Авторы статьи:

Корягин  
Марк Евгеньевич  
– асп. каф. автоматизации исследований и технической кибернетики КемГУ

Чекменев  
Владимир Алексеевич  
– канд. техн. наук, доц. каф. автомобильных перевозок

ванием заявок на центральном узле: со статическим приоритетом, с разделением заявок и с динамическим приоритетом. В качестве критерия будем использовать простой периферийных узлов.

Пример. Строительство и ремонт дорог.

Пусть количество самосвалов – 18. Среднее время загрузки одной машины на асфальтовом заводе - 5 мин., разгрузка у укладчиков - 10 мин. Дорога занимает одинаковое время от асфальтового завода до каждого укладчика и обратно. Очевидно для статического приоритета  $p=0,5$ , для второй модели разделить транспорт поровну по 9 самосвалов. Для динамического приоритета установим  $\alpha=1$ . Применяя формулы, полученные для соответствующих моделей, рассчитаем долю

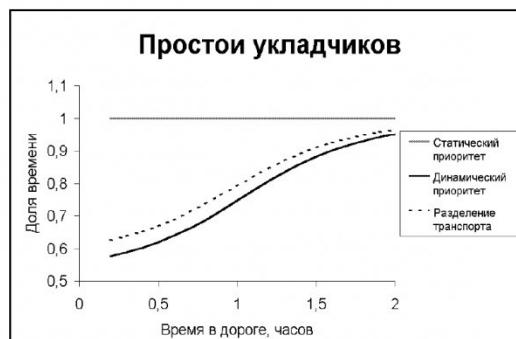


Рис. 5

времени простоя укладчиков в зависимости от расстояния между асфальтовым заводом и укладчиками (результаты нормируем по статическому приоритету). Отметим, что наилучшие результаты дает динамический приоритет, наихудшие статический, причем при сокращении расстояния между асфальтовым заводом и укладчиками, отличия между дисциплинами возрастают. Для больших расстояний просто недостаточно 18 самосвалов. Поэтому, если у предприятий имеется возможность получить информацию о местоположении транспорта, необходимо воспользоваться динамическим приоритетом для оперативного управления погрузкой транспорта. Если таких систем нет, правильнее будет закрепить транспортные средства за каждым потребителем.