

ПЕДАГОГИКА ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

УДК 517

А. А. Бокк

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ...

Что значит “решить уравнение”, как мы полагаем, знают все с четвёртого класса школы – найти число x (или функцию $x(t)$), которое обращает уравнение $f(x) = 0$ в тождество при подстановке этого числа (функции) в уравнение вместо неизвестного.

И, тем не менее, математик классической школы требует, чтобы:

- 1) доказательства существования решения в данном классе чисел (функций);
- 2) доказательства единственности этого решения при данных условиях;
- 3) доказательства устойчивости решения задачи – выявления условий, при которых малым изменениям параметров отвечают малые изменения решения.

Только при совместном выполнении этих трёх условий он считает задачу корректно поставленной¹.

Для представителя технических дисциплин эти требования кажутся придираками: «Надо задачу решать, а не заниматься доказательствами». Со своей колокольни он прав, ибо большинство его задач возникает непосредственно из эксперимента – существование решения обеспечено природой, однако, никто не гарантирует единственность и устойчивость. Математик-прикладник, при отсутствии доказательства корректности решаемой задачи, всегда готов к тому, что после длительных дорогостоящих расчетов обнаружится отсутствие решения или решение, отнюдь не лучшее среди возможных. Уже эти оговорки означают, что «чистый» математик прав (прав «в принципе») – его подход дает гарантию успеха в решении целого класса подобных задач.

Об этом свидетельствует и богатый опыт человечества. Три знаменитые задачи Эллады (о квадратуре круга, о трисекции угла, об удвоении куба) 2500 лет стояли перед человечеством, пока в XIX веке не была доказана их неразрешимость. Сами попытки их решения значительно продвинули науку, поставили и прояснили многие принципиальные вопросы, например, трансцен-

¹ Корректная задача (лат. *corrects* – «исправленный») – задача, в которой решение x , связанное с исходными данными и параметрами $\{u\}$ функциональной зависимостью $x=R(u)$, существует, единственно и устойчиво.

дентность числа π , иррациональность $\sqrt[3]{2}$. Неразрешимость этих классических задач подозревалась ещё древними. При отсутствии доказательства неразрешимости (типичный пример теоремы существования) предпринимались бесконечные бесплодные попытки решения. Снятие условия «использовать при решении только циркуль и линейку без делений», конечно, тотчас делает эти задачи разрешимыми. Трисекция угла решается, если на линейке допустить деления; квадратура круга разрешима с помощью квадратисы Дионстрата; удвоение куба сводится к нахождению точки пересечения парабол².

Попытаемся обсудить целесообразность и возможность доступного изложения вопроса о корректности постановки задачи.

Рассмотрим вопросы существования и единственности решения на примере решения элементарного уравнения $\alpha x^2 = \beta$.

В простейшем варианте $\alpha = \beta = 1$ это уравнение в классе целых чисел Z (тем более в классе действительных чисел R) имеет два решения: $x_1 = +1$ и $x_2 = -1$; в классах натуральных N и неотрицательных действительных чисел R^+ – единственное решение; в классе натуральных четных чисел N_2 не имеет решений.

Соответственно, на предложение «Решить уравнение» необходимо потребовать уточнение «На каком классе чисел (функций)?».

При $\alpha = 1 + \Delta\alpha$, $\beta = 1 + \Delta\beta$, $|\Delta\alpha| < \varepsilon_1$, $|\Delta\beta| < \varepsilon_2$ (ε_1 и ε_2 достаточно малы) решение $x_1 = +\sqrt{\beta/\alpha}$ мало отличается от $x_1 = +1 \in R^+$ (аналогично и $x_2 = -\sqrt{\beta/\alpha}$): следовательно, решение уравнения $\alpha x^2 - \beta = 0$ устойчиво в классе действительных чисел R . Соответственно, задача решения уравнения $x^2 - 1 = 0$ корректна в R .

Устойчивость решения уравнения $\alpha x^2 - \beta = 0$ при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ уже не столь очевидна. При α

² Неразрешимость задач удвоения куба и трисекции угла доказана П. Ванделем в 1837 г. Трансцендентность числа π , и тем самым неразрешимость задачи квадратуры круга, доказана в 1882 г. Ф. Линденманом. Несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной – иррациональность $\sqrt[3]{2}$, установленная пифагорейцами в V веке до н.э., повергла тогда в шок многих.

$=0 + \Delta\alpha$, $|\Delta\alpha| < \varepsilon_1$ малое изменение α резко изменяет величину решения $x_1 = +\sqrt{\beta/\alpha}$ (для простоты рассматриваем только положительное решение, $x_1 \in R^+$): при $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \neq 0$ решение уравнения $\alpha x^2 - \beta = 0$ неустойчиво.

Решение уравнения $\alpha x^2 - \beta = 0$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$ (в простейшем случае $x^2 + 1 = 0$) требует расширить класс чисел R до поля комплексных чисел $C = \{z / z = x + iy, i^2 = -1, x \in R, y \in R\}$ ³. На комплексной плоскости уравнение $z^2 + 1 = 0$ имеет два решения: $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ (условия корректности соблюдены); при α , близких к нулю, решение неустойчиво⁴.

Уравнение можно (требуется?!?) решать не только на том или ином классе чисел, но и на некотором классе функций $x(t)$! В классе C^+ непрерывных неотрицательных функций решение $x^2 = 1$ единственны: $x(t) = 1$, в классе непрерывных функций решений уже два: $x_1(t) = +1$ и $x_2(t) = -1$.

Отбросим условие непрерывности функции $x(t)$... О, ужас! Появляется бесконечно много решений – функций. И не только «простой прямоугольный» импульс

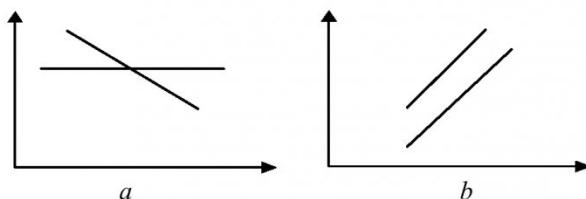
$$x_C(t) = \begin{cases} +1, & a \leq t < c \\ -1, & c \leq t \leq b \end{cases}$$

(таких импульсов бесконечно много, в силу множественности значений параметра c), но и такая «прелестная» функция как

$$x(t) = \begin{cases} +1, & \text{при } t \text{ рациональном} \\ -1, & \text{при } t \text{ иррациональном.} \end{cases}$$

Стоит лишь уточнить, на каком классе функций рассматривается решение, сразу меняется ответ на вопрос о количестве решений,

Уравнение $\alpha x^2 - \beta = 0$ можно рассмотреть и с точки зрения значений параметров. Плоскость R^2 значений параметров ($\alpha; \beta$) распадается на две области:



- первая и третья координатные четверти ($\alpha\beta > 0$) (решения уравнения действительные чис-

ла);

- вторая и четвертая координатные четверти ($\alpha\beta < 0$) (решения чисто мнимые).

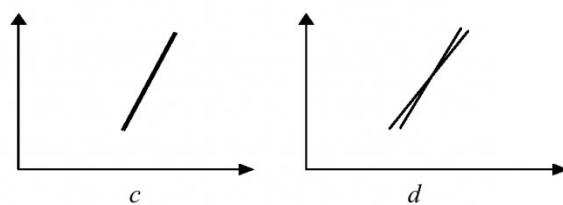
На оси ординат ($\beta = 0$) решение единственное: $x_1 = x_2 = 0$. На оси абсцисс ($\alpha = 0$) уравнение исчезает, а при $\alpha = \beta = 0$ – в начале координат плоскости параметров оно превращается в $0 \cdot x^2 = 0$ и решением может служить любое число. Соответственно, очевидна неустойчивость в точках ($\alpha \approx 0$; $|\beta| > \varepsilon$).

Здесь мы не останавливаемся на решении уравнения $\alpha x^2 + \beta = 0$ в классе функций комплексного переменного, хотя именно в этой области становятся естественными и понятными многие факты, связанные с элементарными функциями. Достаточно сказать о знаменитой формуле Л. Эйлера, связывающей показательную и тригонометрические функции: $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$ (к сожалению, ни школьники, ни даже студенты не получают первоначальных и абсолютно необходимых сведений о комплексных числах, тем более о комплексных функциях).

Таким образом, решая отнюдь не самую сложную математическую задачу, мы неожиданно сталкиваемся с проблемой корректности и соответственно задумываемся: а **существует ли решение?** а **сколько решений?** а **получится ли правдоподобное решение, если чуть-чуть изменить параметры задачи?**

Насколько обширна область математических задач, где нельзя не учитывать проблему корректности (мы не ставим этого вопроса перед лицами, знакомыми с математической теорией устойчивости)?

Прекрасным примером служит решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:



$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 & (l_1) \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 & (l_2) \end{aligned}$$

геометрически сводящееся к поиску на плоскости точки пересечения двух прямых (l_1) и (l_2).

Если определитель системы

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

прямые не параллельны (пересекаются в одной точке) – единственное решение. При $|A| = 0$ и $a_{11}/a_{21} = a_{12}/a_{22} \neq b_1/b_2$ прямые параллельны (нет пересечения) – решения нет. При $|A| = 0$, но $a_{11}/a_{21} = a_{12}/a_{22} = b_1/b_2$ прямые сливаются – бесконечно много решений.

На рисунке (вариант d) прямые не параллель-

³ Введение мнимой единицы i , $i^2 = -1$, привыкание к комплексным числам потребовало несколько веков! И только геометрическая интерпретация числа $z = x + iy$ как точки $M(x; y)$ плоскости XOY или радиус-вектора OM сделала их привычными и удобными для математиков.

⁴ Привыкание к комплексным числам потребовало несколько веков. Лишь удачная геометрическая интерпретация в виде точки на плоскости или радиуса-вектора сделала их привычными и удобными для простых смертных.

ны, но их угловые коэффициенты $k_1 = -a_1/b_1$ и $k_2 = -a_2/b_2$ достаточно близки друг к другу ($k_1 \approx k_2$) – решение неустойчиво, т.е. достаточно слегка «пошевелить» прямые (l_1) и (l_2) , как точка пересечения резко убегает за пределы рисунка.

Аналитическое условие разрешимости такой системы (неравенство определителя системы нулю, иначе линейная независимость её уравнений) легко переносится на случай решения системы n уравнений с n неизвестными (возникает при решении различных задач оптимизации, при оценке полных затрат на производство продукции – известная в экономике модель Леонтьева и пр.).

Вот простой, классический числовой пример неустойчивости линейной системы⁵:

$$\begin{aligned}x + 0.99y &= 1.99 \\0.99x + 0.98y &= 1.97\end{aligned}$$

Решение единственное $M(x=1; y=1)$, но угловые коэффициенты почти совпадают $k_1 = -1/0.99 = -1,010101$ и $k_2 = -0.99/0.98 \approx -1,010204$ (различие в 0,01%). Вектор правых частей $b = (1,99; 1,97)^T$ немного изменим на $\Delta b = (-0,000097; +0,000106)^T$, и обнаруживаем, что решение меняется очень сильно: точка пересечения $M(x=1; y=1)$ переходит в $M_1(x=3; y=-1,0203)$. Другими словами, относительная малая погрешность при задании правых частей $\partial b = \Delta b / |b| = (0,0035%; 0,0078%)^T$ влечет колossalную погрешность в решении. Такого рода системы называют «плохо обусловленными» (как было бы полезным знакомство с подобными примерами в школьные годы для воспитания критического восприятия предлагаемых шаблонов)⁶.

Решение алгебраического уравнения $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ привело к созданию алгебры. Решение уравнения линейного $ax + b = 0$ и квадратного $ax^2 + bx + c = 0$ уравнений знали ещё в Древнем Вавилоне, хотя случай отрицательного дискриминанта $D = b^2 - 4ac$, конечно, объявлялся не имеющим корней. Школьников

⁵ Пример взят из Д. Форсайт, К. Моллер Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М., 1969. – С.37.

⁶ Аналитическое условие плохой обусловленности, большая величина числа $\|\Delta x\| / \|x\|$ характеризуется числом обусловленности $\sigma = \|A\| * \|A^{-1}\| = |\lambda_k / \lambda_1|$, что следует из неравенства $\|\Delta x\| / \|x\| \leq \|A\| * \|A^{-1}\| * \|\Delta b\| / \|b\|$. Здесь требуются знакомство с такими понятиями как матрица A системы уравнений, норма вектора x (можно понимать как длину вектора), норма матрицы $\|A\|$, определяемая равенством $\|A\| = \max \|Ax\| / \|x\|$, собственные числа матрицы λ ($\lambda_1 = \min \lambda$; $\lambda_k = \max \lambda$). Эти понятия, как правило, остаются за пределами вузовского курса. В приведенном примере $\lambda_1 = -0,00005$, $\lambda_2 = 1,98005$ и число обусловленности $\sigma \approx 40000$ весьма велико, система неустойчива.

и до сих пор учат, что в этом случае квадратное уравнение корней не имеет, забывая добавлять: ... «на множестве R действительных чисел». В наши дни обычный школьник не знает о существовании формулы Кардано для уравнения 3-й и Феррари уравнения 4-й степеней (разумеется они столь громоздки, что предпочтительнее соответствующие уравнения решать численно), что еще в 1825 г. И.Абелем показано, что при $n > 4$, как правило, корни уравнения нельзя выразить через его коэффициенты; более того последние 40 лет ему не дают понятия об основной теореме алгебры, утверждающей существование ровно n корней алгебраического уравнения $P_n(x)=0$.

Обратимся к примеру поиска корней алгебраического уравнения

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+20) &= \\= x^{20} + 210x^{19} + \dots + 20! &= 0.\end{aligned}$$

Решение тривиально : корни – целые числа от -1 до -20. Изменив коэффициент при $x^{19} a_1 = 210$ на чрезвычайно малую величину $|\Delta a_1| = 2^{-23} \approx 1,2 \cdot 10^{-7}$, получим уравнение, корни которого $x_{10}, x_{11}, \dots, x_{20}$ убегают с действительной прямой на комплексную полуплоскость. В чем дело? Посмотрев на коэффициенты при младших степенях, видим значения порядка 10^{19} , которые представляются в памяти вычислительного устройства приближенно, то есть фактически корректура внесена и в другие коэффициенты.

Для чистоты эксперимента понизим степень многочлена, возьмем уравнение

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+15) &= \\= x^{15} + 120x^{14} + \dots + 1307674368000 &= 0.\end{aligned}$$

(погрешности в представлении коэффициентов нет), изменим $a_1=120$ на 10^{-7} и найдем корни

$$\begin{aligned}-15.03 &-13.73 &-13.43 &-11.47 &+0.341 \\&-11.47 &-0.341 &-9.79 &-9.09 \dots\end{aligned}$$

Такого рода неустойчивость свойственна многочленам высокой степени, корни которых сосредоточены на отрезке малой длины (малой сравнительно с коэффициентами многочлена). Так, в приведенном примере длина 14-го диапазона корней ничтожна в сравнении с коэффициентом $a_{15} = 15! \approx 1,3 \cdot 10^{12}$.

Обращаясь к решению простейшего дифференциального уравнения $df/dx = g(x)$, мы вводим операции интегрирования (операции, обратной к дифференцированию), которая как большинство обратных операций, неоднозначна (мынезатрагиваем здесь проблематику таких операций). Для обеспечения единственности решения дифференциального уравнения приходится к нему присоединять начальные или краевые условия.

И снова вопросы, существует ли первообразная, в каком классе функций ее искать, устойчиво ли решение по отношению к параметрам задачи.

Доказано, что каждая кусочно-непрерывная функция $g(x)$ имеет первообразную, но единого аналитического способа отыскания первообраз-

ных даже элементарных функций – нет (нахождение первообразных – искусство, требующее не только знаний, но и смекалки, и … удачи).

Простейшее уравнение k -го порядка $df^k/dx^k = g(x)$ требует многократного интегрирования и его решение зависит от k произвольных постоянных:

$$f(x) = \int_a^x \left(\int_a^x \dots \left(\int_a^x g(t) dt \dots \right) dt \right) + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \dots + c_k$$

и потому не единственno (если иметь дело с краевыми задачами для уравнений в частных производных, то наряду с проблемой выбора группы методов решения, оценкой качества аппроксимации, скорости сходимости и пр., обнаруживаем еще больше проблем, связанных с корректностью поставленных задач – существование решения, устойчивость по начальным условиям, устойчивость по граничным условиям и пр.)⁷

Значения параметров задачи, как правило, возникают из практики и потому «отягощены»

⁷ Интеграл

$$I_k(g(x)) = \int_a^x \left(\int_a^x \dots \left(\int_a^x g(t) dt \dots \right) dt \right) dt$$

можно преобразовать к интегралу, зависящему от параметра.

$$I_k(g) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^{1-k}}, \quad x > a.$$

Последнее выражение имеет смысл и при дробном k . Так приходят к понятию «дробного» интеграла

$$(I_\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

$$0 < \alpha < 1, \quad x > a$$

где $\Gamma(\alpha)$ есть знаменитая гамма-функция

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0,$$

обобщающая понятие факториала $n! = \Gamma(n+1)$. При $\alpha=1/2$ дробный интеграл был известен ещё в начале XVIII в. Г.В. Лейбницу. Обратной операцией будет «дробная» производная:

$$(D_\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} \right),$$

$$0 < \alpha < 1,$$

– это тоже интеграл, зависящий от параметра. Уравнение в «дробных» производных

$$(D^\alpha y)(x) = g(x), \quad 0 < \alpha < 1$$

имеет решением «дробный» интеграл-функцию

$$y(x) = (I_\alpha g)(x) + x^{1-\alpha} / \Gamma(\alpha),$$

где второе слагаемое соответствует постоянной c_1 в решении

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt + c_1$$

дифференциального уравнения $df/dx = g(x)$.

неизбежной погрешностью измерения (кроме редкого случая, когда параметр есть количество предметов от 0 до 20, полагая, что до 20 мы считаем без ошибки). В технике обычно погрешность в 3%-5% считается вполне приемлемой. Поэтому параметры задач склонны к малым изменениям и естественно требовать устойчивости результата к малым изменениям параметров. Увы, существует много задач, нуждающихся в величайшей осторожности и тщательности при решении и в исследовании зависимости последнего от параметров задачи. Методы решения некорректных задач разрабатываются всего лет 80, тогда как решения корректных задач насчитывают 25 веков⁸.

Мы не затрагиваем здесь вопросов устойчивости численного решения задач линейной алгебры, дифференциальных уравнений и др., где иная погрешность в параметрах подчас приводит к абсолютно абсурдным решениям. Общие вопросы устойчивости и корректности дифференциальных уравнений составляют предмет целого ряда математических дисциплин и едва ли можно здесь внятно и кратко изложить хотя бы подходы к ним.

В заключение заметим, что нашей целью было желание обратить внимание преподавателя математики (как школьного, так и вузовского) на то, что даже простой вопрос о решении элементарного уравнения типа $\alpha x^2 = \beta$ может привести к довольно общим и глубоким вопросам современной математики; на то, что понятия существования, единственности, устойчивости решения уравнения принципиально важны, что они доступны для ознакомления и изложения и для школьников старших классов, и студентам младших курсов нематематических вузов.

□ Автор статьи:

Бокк
Артур Андреевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
(Тюменский индустриальный институт)

⁸ Ж. Адамар в 1923 г. поставил вопрос о корректности на примере одной задачи математической физики. Он высказал мысль, что правильно математически поставленная задача должна быть корректна. Но имеется огромный класс задач, некорректных изначально. Это и задачи вероятности, где неоднозначность ответа естественна по своей природе, и задачи, где ответ лежит в «критической» области неустойчивости, а такие задачи вызывают всё больший интерес в естествознании и в математике. Такими являются и задачи математического программирования, оптимального управления, где нужно из множества допустимых решений выбрать «наилучшее», и так называемые обратные задачи, и т. д., и т.п. Проблемы решения некорректных задач исследовались впервые А. Тихоновым и В. Ивановым в 1943 г.