

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 539.19+541.77+541.6

С. Ш. Кажикенова, Б.Ш. Алимова

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ РАСПЛАВОВ

Расплавленные металлы и их сплавы находят широкое применение в народном хозяйстве. Этот интерес особенно велик в теплотехнике, ядерной и электронной технике и других отраслях промышленности, а также для удовлетворения потребностей металлургического производства и в разработке новых технологий в этой области.

Наибольшее внимание расплавленным металлам уделено в металлургии, что обусловлено необходимостью прохода жидкой фазы перед кристаллизацией. Развитие металлургии дает импульс к развитию исследований теплофизических характеристик расплавов.

С другой стороны, недостаточное применение и внедрение математических методов моделирования состояния расплава, которые могут прогнозировать процесс, существенно тормозят прогресс технологий в металлургии. Эти исследования важны не только для теории металлургических процессов, но и для технологических целей.

Известно, что использование приближения несжимаемости среды (плотность частицы малого объема не изменяется со временем) при выводе дифференциального уравнения закона сохранения массы приводит к чрезвычайно простой его формулировке – поле вектора скорости должно быть соленоидальным. При описании динамических свойств сплошных сред получены следующие системы уравнений: для вязкого расплава – уравнения Навье–Стокса, для идеального расплава – уравнения Эйлера, для слабосжимаемого расплава – уравнения Обербека–Буссинеска.

В фундаментальных исследованиях и в области прикладных разработок эти математические модели являются общепринятыми для моделирования течения расплава.

В класс несжимаемых сред данные математические модели объединяет условие соленоидальности поля скоростей, что относит их к уравнениям не типа Коши – Ковалевской. Именно это обстоятельство создает ряд математических трудностей при построении решений.

Еще один отличительный признак моделей несжимаемых сред – они являются нелинейными. Основные усилия исследователей направлены на преодоление проблем, обусловленных нелинейностью моделей. Именно наличие нелинейного конвективного члена считается главным препятствием для получения решений.

В результате многочисленных исследований установлено, что попытки построения неявных схем приводят к многошаговым итерационным процессам с различными вариантами удовлетворения условия соленоидальности.

Чтобы получить хорошую сходимость при получении численных решений необходимо на границе разностных сеток обеспечивать свойства сохранения потоков и высокую степень аппроксимации уравнений несжимаемого расплава.

Для компьютерного моделирования течения расплавов необходимо численное решение уравнений гидродинамики методом конечных разностей.

Рассмотрим плоское течение. Пусть Ω – область евклидова пространства R^n , причем $x=(x_1, x_2)$. Разобьем все пространство $R^n(x, t)$ на элементарные ячейки, площадь которых: $x_i=k_i h$, $h>0$ – шаг, $k_i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $t=k \Delta t$.

Составим разностные отношения по x_i :

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= \frac{1}{h} [v(x, t) - v(x - he^j, t)] \\ v_{\bar{x}_i} &= \frac{1}{h} [v(x, t) - v(x + he^j, t)] \end{aligned}$$

Сдвиг по x_i определим как:

$$v(x, t) = v(x \pm he^j, t)$$

Векторы e^j представляют собой единичные векторы по осям x_i . Согласно работе [1] векторы скорости выражаются соотношениями:

$$v_h^2 = \sum_{i=1}^n v_{ih} v_{ih},$$

$$v_{hx}^2 = \sum_{k=1}^n v_{hx_k}^2 = \sum_{i,k=1}^n [v_{ihx_k}]^2,$$

$$v_{h\bar{x}}^2 = \sum_{k=1}^n v_{h\bar{x}_k}^2 = \sum_{i,k=1}^n [v_{ih\bar{x}_k}]^2.$$

Тогда для произвольных функций u_h, v_h , заданных на сетке, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 & \nabla_h v_h \cdot \nabla_{x_i} = \\
 & = u_{hx_i} v_h + u_h v_{hx_i} = u_{hx_i} v_h + u_h v_{hx_i}, \\
 & \nabla_h v_h \cdot \nabla_{x_i} = \\
 & = u_{h\bar{x}_i} v_h + u_h v_{h\bar{x}_i} = u_{h\bar{x}_i} v_h + u_h v_{h\bar{x}_i}, \\
 & u_t^k u^k = \frac{\nabla^k - \nabla^{k-1}}{2\Delta t},
 \end{aligned}$$

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} u_{hx} \nabla_h \nabla_{x_i} =$$

$$= \frac{-h \sum_{\ell=1}^m u_h \nabla_{h\bar{x}} \nabla_{x_i} u_h \nabla_h \nabla_{x_i} u_h \nabla_{h\bar{x}} \nabla_{x_i}}{h}$$

Здесь принято, что:

$$\begin{aligned}
 u_t^k &= \frac{1}{\Delta t} \nabla^k - u^{k-1} \\
 u_{hx} \nabla_{x_i} &= \frac{1}{h} \nabla_h \nabla_{x_i} + 1 \nabla_{x_i} u_h \nabla_{x_i} \\
 u_{h\bar{x}} \nabla_{x_i} &= \frac{1}{h} \nabla_h \nabla_{x_i} u_h \nabla_{x_i} - 1 \nabla_{x_i}
 \end{aligned}$$

Для демонстрации данного метода после соответствующих преобразований перепишем уравнение гидродинамики в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{k=1}^n Z_k \nabla \cdot \frac{1}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} v = f, \quad (1)$$

где:

$$Z_k \nabla \cdot = -\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + v_k \frac{\partial w}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} w.$$

Для простоты рассмотрим случай, когда $n=2$. Для этого разобьем временной интервал $[0, T]$ точками:

$$t_m = m \Delta t, t_{m-\frac{1}{2}} = \left(m - \frac{1}{2} \right) \Delta t, \quad m=1,2,\dots,N.$$

Это позволит рассмотреть слои t_m и t_{m-1} . Обозначим индексы так, чтобы v , а также w указали на номер слоя, на котором они вычисляются. Существуют различные аппроксимации разностного оператора Z_k . Возьмем этот оператор в виде предложенного в работах [2], [3]:

$$\begin{aligned}
 Z_k^m \nabla \cdot &= -\gamma w_{x_k \bar{x}_k} + \frac{1}{2} v_k^{m-\frac{1}{2}} w_{x_k} + \\
 &+ \frac{1}{2} v_k^{m-\frac{1}{2}} w_{\bar{x}_k} + \frac{1}{2} v_{kx_k}^{m-\frac{1}{2}} w_{x_k}
 \end{aligned}.$$

Тогда уравнение (1) можно представить следующей разностной схемой:

$$\frac{1}{\Delta t} \left(v_1^{m-\frac{1}{2}} - v_1^{m-1} \right) + \tau_2^m \left(v_1^{m-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} f_1^{m-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(v_1^m - v_1^{m-\frac{1}{2}} \right) + \tau_1^m \nabla_{x_1} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left(v_{1x_1}^m + v_{2x_2}^{m-\frac{1}{2}} \right)_{\bar{x}_1} = \frac{1}{2} f_1^m \quad (3)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(v_2^m - v_2^{m-\frac{1}{2}} \right) + \tau_2^m \nabla_{x_2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left(v_{2x_2}^m + v_{1x_1}^{m-\frac{1}{2}} \right)_{\bar{x}_2} = \frac{1}{2} f_2^{m-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Таблица 1. Решение первой краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона из справочных источников

Y	X					
	0.00	0.40	0.80	1.20	1.60	2.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.20	0.08	0.32	0.51	0.72	0.99	0.84
0.40	0.32	0.72	1.07	1.41	1.78	1.76
0.60	0.72	1.23	1.68	2.12	2.56	2.76
0.80	1.28	1.82	2.65	3.22	3.82	3.84
1.00	2.00	2.44	2.96	3.56	4.24	5.00

Таблица 2. Решение второй краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона из справочных источников

Y	X					
	0.00	0.40	0.80	1.20	1.60	2.00
0.00	1.00	1.40	1.80	2.20	2.60	3.00
0.20	2.00	1.05	0.95	1.08	1.44	2.96
0.40	2.00	1.02	0.60	0.59	0.93	2.84
0.60	4.00	1.36	0.78	0.63	0.93	2.64
0.80	5.00	2.78	2.12	1.81	1.64	2.36
1.00	6.00	5.84	5.36	4.56	3.44	2.00

$$\frac{1}{\Delta t} \left(v_2^m - v_2^{m-\frac{1}{2}} \right) + \tau_1^m \oint_2 \frac{1}{2} f_2^m, \quad (5)$$

где $m=1,2,\dots,N$. Для полного завершения построения разностной схемы к этим уравнениям следует добавить начальные и граничные условия.

$$\begin{aligned} & \left\| v_1^{m-\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| v_1^{m-1} \right\|^2 + \left\| v_1^{m-\frac{1}{2}} - v_1^{m-1} \right\|^2 + \\ & + 2\gamma\Delta t \left\| v_{1x_2}^{m-\frac{1}{2}} \right\|^2 = \Delta t \left(f_1^{m-\frac{1}{2}}, v_1^{m-\frac{1}{2}} \right), \\ & \left\| v_1^m \right\|^2 - \left\| v_1^{m-\frac{1}{2}} \right\|^2 + \left\| v_1^m - v_1^{m-\frac{1}{2}} \right\|^2 + 2\gamma\Delta t \left\| v_{1x_1}^m \right\|^2 + \\ & + \frac{2\Delta t}{\varepsilon} \left[\left\| v_{1x_1}^m \right\|^2 + \left(v_{1x_1}^m, v_{2x_2}^{m-\frac{1}{2}} \right) \right] = \Delta t \oint_1^m v_1^m, v_1^m \circ \\ & \left\| v_2^{m-\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| v_2^{m-1} \right\|^2 + \left\| v_2^{m-\frac{1}{2}} - v_2^{m-1} \right\|^2 + 2\gamma\Delta t \left\| v_{2x_2}^{m-\frac{1}{2}} \right\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2\Delta t}{\varepsilon} \left[\left\| v_{2x_2}^{m-\frac{1}{2}} \right\|^2 + \left(v_{1x_1}^{m-1}, v_{2x_2}^{m-\frac{1}{2}} \right) \right] = \Delta t \left(f_2^{m-\frac{1}{2}}, v_2^{m-\frac{1}{2}} \right), \\ & \left\| v_2^m \right\|^2 - \left\| v_2^{m-\frac{1}{2}} \right\|^2 + \left\| v_2^m - v_2^{m-\frac{1}{2}} \right\|^2 + \\ & + 2\gamma\Delta t \left\| v_{2x_1}^m \right\|^2 = \Delta t \oint_2^m v_2^m, v_2^m \circ \end{aligned}$$

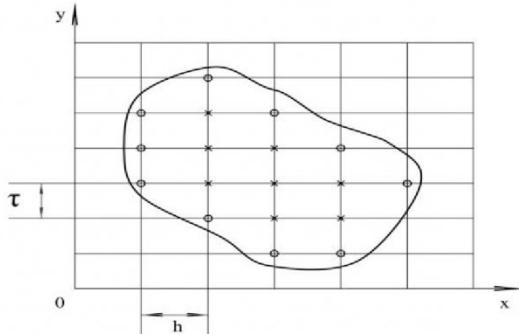


Рис. 1. Область интегрирования

Таким образом, мы получаем уравнения (2) – (5), которые решаются по отдельности. Это позволяет написать машинные программы для реализации

Таблица 3. Решение первой краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона с заданной точностью $\varepsilon=0.1$

Y	X										
	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000	1.200	1.400	1.600	1.800	2.000
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
0.2	0.080	0.241	0.262	0.264	0.266	0.269	0.272	0.276	0.280	0.330	0.840
0.4	0.320	0.303	0.301	0.303	0.305	0.308	0.311	0.315	0.320	0.447	1.760
0.6	0.720	0.356	0.305	0.306	0.308	0.310	0.314	0.318	0.323	0.538	2.760
0.8	1.280	0.429	0.310	0.308	0.310	0.313	0.316	0.320	0.325	0.636	3.840
1.0	2.000	0.523	0.315	0.311	0.313	0.315	0.319	0.323	0.329	0.741	5.000
1.2	2.880	0.639	0.322	0.314	0.316	0.319	0.322	0.326	0.332	0.854	6.240
1.4	3.920	0.776	0.330	0.318	0.320	0.323	0.326	0.330	0.337	0.974	7.560
1.6	5.120	0.935	0.341	0.323	0.326	0.329	0.332	0.336	0.343	1.105	8.960
1.8	6.480	1.248	0.581	0.613	0.674	0.744	0.821	0.906	1.002	1.946	10.44
2.0	2.000	2.440	2.960	3.560	4.240	5.000	5.840	6.760	7.760	8.840	10.00

Таблица 4 . Решение второй краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона с заданной точностью $\varepsilon=0.1$

Y	X										
	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000	1.200	1.400	1.600	1.800	2.000
0.0	1.000	1.200	1.400	1.600	1.800	2.000	2.200	2.400	2.600	2.800	3.000
0.2	2.000	1.109	1.011	1.012	1.016	1.019	1.023	1.026	1.029	1.138	2.960

Таблица 5. Решение первой краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона с заданной точностью $\varepsilon=10^{-4}$

Y	X					
	0.000	0.400	0.800	1.200	1.600	2.000
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.20	0.080	0.301	0.508	0.750	1.001	0.800
0.40	0.320	0.730	1.055	1.430	1.851	1.710
0.60	0.720	1.221	1.666	2.101	2.590	2.732
0.80	1.280	1.790	2.599	3.202	3.798	3.884
1.00	2.000	2.490	2.981	3.549	4.290	5.001

ции численных конечно-разностных методов. Для проверки корректности работы программы решена плоская задача Дирихле для уравнения Пуассона, приведенного в работе [4]. Интегрирование производится в прямоугольной сетке в соответствии с рис. 1.

Согласно [4], решение уравнения Пуассона

приведено в табл. 1.

Для контрольного примера в табл. 2 приведем решение задачи Дирихле уже с другими граничными условиями из тех же справочных источников.

Сравнивая решения первой и второй краевых задач Дирихле из справочных источников, пред-

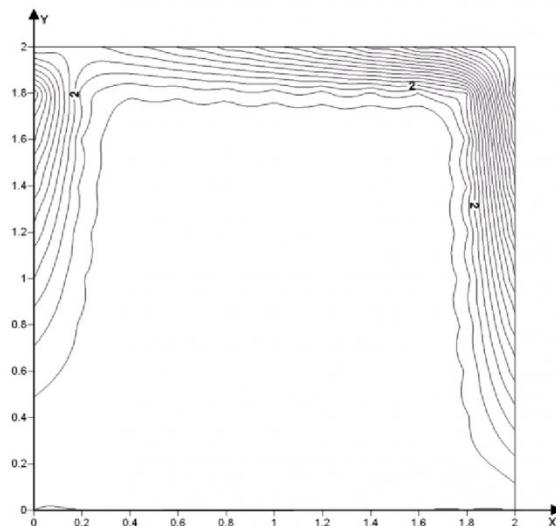


Рис. 2 . Изолинии и поверхность для первой краевой задачи Дирихле

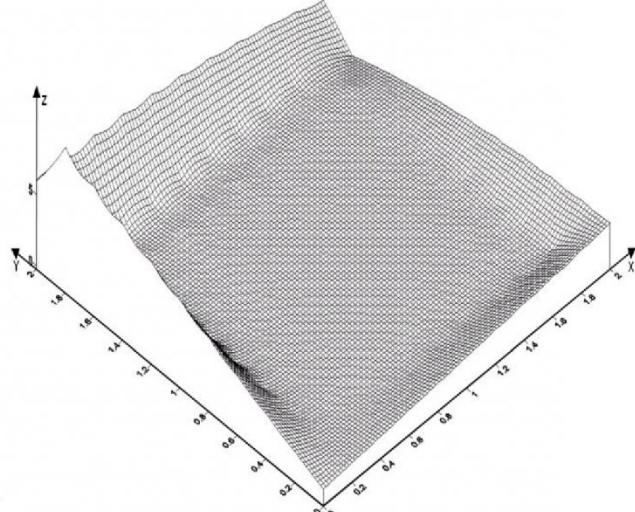


Рис. 3. Изолинии и поверхность для второй краевой задачи Дирихле

ставленными в табл. 1 и 2, с результатами программы для решения краевых задач, представленными в табл. 3 и 4, видим удовлетворительное совпадение решений при заданной точности $\varepsilon=0.1$

Реализация этой процедуры занимает 15 минут машинного времени.

А при увеличении точности до $\varepsilon=10^{-4}$ наши результаты, представленные в табл. 5, фактически совпадают с результатами стандартных справочных данных.

Необходимо отметить, что увеличение точности приводит к возрастанию затрат машинного времени, которое составляет 45 минут.

Для наглядности представим изолинии и поверхности полученных решений в соответствии с рис. 2 и с рис.3.

Полученные результаты показывают корректность составленной программы, а также корректность поставленных краевых задач для уравнений гидродинамики, рассмотренных нами выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
2. Shimizu A., Wada T. A numerical analysis of vortex growth in a two-dimensional jet // Comput. and Fluids. – 1985. – 13, № 1. – P. 83-97.
3. Samarskii A. A., Gerasimov B. P., Elizarova T. G., Kalachinskaya I. S., Karagichev A. V., Lesunovsky A. V., Semushin S. A., Chetverushkin B. I., Churbanov A. G. Computer simulation in engineering hydrodynamics // Int. Symp. Comput. Fluid Dyn. – Tokyo, 1985. – P. 1007-1010.
4. Rosenfeld Moshe, Israeli Moshe. Numerical solution of incompressible flows by a marching multigrid nonlinear method // AIAA 7th Comput. Fluid Dyn. Conf.: Collect. Techn. Pap. – New-York, 1985. – P. 108-116.

□ Автор статьи:

Кажикенова
Сауле Шарапатовна
- канд.техн. наук, доц. каф. «Высшая математика» (Карагандинский государственный технический университет).
Тел. 8 701 292 9613.
Email: sauleshka555@mail.ru

Алимова
Баян Шингисовна
- ст.преп. каф. «Высшая математика»
(Карагандинский государственный технический университет).
Тел. 8 701 292 9613.

УДК 343.61:343.85

В.В. Сметанина, И.А. Ермакова

АНАЛИЗ ТЯЖКОЙ ПРЕСТУПНОСТИ В ЦЕЛЯХ ЕЕ ПРОФИЛАКТИКИ НА ПРИМЕРЕ КЕМЕРОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Благосостояние и качество жизни жителей отдельного региона во многом характеризуется криминальной обстановкой в нем, в частности, наиболее опасными преступлениями против личности - умышленными убийствами и умышленным причинением тяжкого вреда здоровью (статьи 105, 111 УК РФ). Поэтому анализ численности и причин тяжких и особо тяжких преступлений, а также поиск мер, позволяющих снизить их количество, являются очень важными задачами, стоя-

щими перед работниками правоохранительных органов.

Следует отметить, что за последние 10 лет в Кемеровской области наблюдается устойчивая тенденция к снижению указанных преступлений. Число поставленных на учет умышленных убийств снизилось вдвое, с 1023 в 2000-м до 509 в 2009г. Также снижалось что фактов умышленного причинения тяжкого вреда здоровью, но менее интенсивно - на 4% (с 1879 до 1803).

Таблица 1. Удельные показатели тяжких и особо тяжких преступлений в расчете на 100 тысяч населения

Регион	Уровень умышленных убийств на 100 тыс. населения	Уровень умышленного причинения тяжкого вреда здоровью на 100 тыс. населения
Забайкальский край	9,3	21,7
Иркутская область	4,9	17,4
Кемеровская область	4,5	15,8