

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.21

А.С.Сорокин

ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ ПОНЯТИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

1 Введение. В этой работе разрабатывается структура для анализа понятия эквивалентности между моделями. В этой структуре представлено несколько эквивалентностей, которые были применены для обработки модели алгебры и модели характеристик [1- 10]. Под понятием эквивалентности понимаются критерии для определения тождественности двух объектов в некотором смысле. Например, общая задача большинства методологий моделирования – *модификация модели* – задача установления адекватного представления модели для обеспечения цели исследования. Для модели характеристик «адекватное представление» обычно интерпретируется как вычисление определенных количественных особенностей характеристик в пределах приемлемых ошибочных границ. Для модели алгебры процесса это интерпретируется как условие наблюдаемого поведения модели при ее действии в сравнении с наблюдаемым или намеченным поведением системы.

Структура, которую рассматриваем, идентифицирует три различных класса эквивалентности от объекта к объекту, которые могут возникнуть при моделировании: эквивалентность системы от модели к модели, от состояния к состоянию. Для моделей алгебры процесса применяют единственное понятие эквивалентности, а именно, *понятие бимоделирования*. Два фактора тогда эквивалентны, когда их наблюдаемое поведение представляется тождественным. Это - формально определенное понятие эквивалентности основано на маркированной системе перехода, лежащей в основе алгебры процесса.

Бимоделирование может характеризовать все три класса эквивалентности от объекта к объекту до тех пор, пока в алгебре процесса все моделируемые объекты (система, модель и состояния) представлены как факторы.

Моделирование трех классов эквивалентности весьма различно, начиная с объекта: система - модель - состояние. Для марковского процесса поведение модели охарактеризовано состоянием, в котором оно может пребывать и временем пребывания в нем [3-11]. Таким образом, *модели* и *состояния* рассматриваются как различные типы объектов. Состояния не рассматриваются как ак-

тивные объекты. Напротив, в алгебре процесса поведение модели охарактеризовано действиями, в которых оно может участвовать. В любой момент времени они будут представлены текущей производной (состоянием). Однако понятие *модели* и *состояния* являются взаимозаменяемыми в алгебре процесса с помощью семантики языка, каждое «состояние» также включает информацию обо всех возможных будущих состояниях, которые могут достигаться с помощью переходов языка. И модель, и состояние представлены как факторы или выражения в языке.

Небольшое формальное развитие системы к модели, а также и эквивалентности от модели к модели для модельных характеристик представляют прагматический интерес. Напротив, работает формальное развитие эквивалентности системы от состояния к состоянию. Эти эквивалентности формируют основание для методов агрегирования, чтобы привести пространство состояний основной марковской модели и обеспечить применение метода для разрешимости больших моделей.

В разделе 2 представлены идеи бимоделирования, которое широко используется как понятие эквивалентности процесса в алгебре и объясняет её использование для характеристики эквивалентности системы от модели к модели и от состояния к состоянию. В общих чертах даётся расширенное понятие бимоделирования, для того чтобы применить его к временным и вероятностным процессам алгебры. В разделе 3 обсуждается система модели и её эквивалентность от модели к модели, которые имеют рассмотренные характеристики моделей. В разделе 4 рассматриваются методы агрегирования в модельном упрощении и обсуждается эквивалентность перехода от состояния к состоянию. Наконец, в разделе 5 обсудим, как поведение компонента PEPA может быть привлечено для структурного стиля или стиля эквивалентности бимоделирования. В [1] представлено сильное бимоделирование для PEPA.

2 Процессы в алгебре и бимоделирование. В этом разделе понятие бимоделирования определено в контексте процесса чистой алгебры, такой как CCS. Бимоделирование основано на идее на-

блюдаемого поведения. Сильная и слабая формы эквивалентности определены в зависимости от того, будут ли внутренние действия принадлежать множеству наблюдаемых действий. Понятие бимоделирования было распространено как на временной, так и на вероятностный процессы в алгебре, как описано в разделах 2.2 и 2.3. В разделе 2.4 показано, как бимоделирование может быть применено к различным классам эквивалентности от объекта к объекту для процесса алгебры модели.

2.1 Бимоделирование для строгих процессов в алгебре. Бимоделирование стремится представить идею эквивалентности идентичной наблюдаемому поведению. Если два фактора бигомотетичны, их невозможно отличить при наблюдении. Однако нужно определить, какие действия факторов считать видимыми наблюдателю и контекст, в котором они наблюдаются. В самой сильной форме биподобия эти два фактора способны к тем же самым переходам и производным, которые следуют из этих же самых переходов в факторах и сами себе бигомотетичны.

Это понятие эквивалентности основано на маркированной системе перехода, определенной с помощью семантики языка. Таким образом, для языка маркированная система перехода есть тройка $\langle \Phi, Act, \xrightarrow{a} | a \in Act \rangle$. Сильная форма бимоделирования выражается следующим образом.

Определение 2.1 Два фактора $P, Q \in P$ сильно бигомотетичны и обозначают $P \propto Q$, если найдется отношение R из $P \times P$ такое, что если $\langle P, Q \rangle \in R$ тогда для любого $a \in Act$:

1. Всякий раз, когда $P \xrightarrow{a} P'$, то для каждого $Q', Q \xrightarrow{a} Q'$ и $\langle P', Q' \rangle \in R$;
2. Всякий раз, когда $Q \xrightarrow{a} Q'$, то для каждого $P', P \xrightarrow{a} P'$ и $\langle P', Q' \rangle \in R$.

Таким образом, если P и Q - сильно бигомотетичные факторы, то любое действие одного должно соответствовать другому. Кроме того, нужно также соответствовать любому последующему действию. Важно отметить, что это включает внутреннее τ действие. Определение бигомотетичности может быть также выражено в терминах последовательностей действий, а не единичных действий, т. е. два фактора сильно бигомотетичны, если любой переход, сформированный последовательностью действий, которые могут быть выполнены одним фактором, могут быть выполнены другим фактором и полученные производные тоже будут сильно бигомотетичными.

Более слабые формы бимоделирования определены для ограниченного класса действий, которые принадлежат множеству возможных

действий $Act \setminus \{\tau\}$. Таким образом, внутреннее τ действие, как предполагается, не принадлежит множеству действий. Если α видимое действие, то внешний наблюдатель не различит последовательности действия $\tau\alpha$, или даже $\tau\tau\alpha$. Слабо бигомотетичные факторы могут сформировать те же самые последовательности из видимых действий, модуль которых состоит из конечного числа τ действий до или после любого из видимых действий, и получающиеся факторы будут слабо бигомотетичны. В CCS промежуточное понятие эквивалентности представлено как *конгруэнтное наблюдение*. Два фактора будут конгруэнтно наблюдаемы, если любое действие одного из них (включая τ действие) конгруэнтно другому, и получающиеся производные слабо бигомотетичны.

Чтобы показать, что два фактора эквивалентны в этом смысле, необходимо, чтобы существовало отношение R между производными каждого фактора, которое удовлетворяет условиям Определения 2.1. Бимоделирование формирует классы эквивалентности для множеств элементов процесса P . Это разделение стимулирует естественным путем соответствующее разделение на производном множестве любого фактора. Для того чтобы показать строгое бимоделирование между объектами CCS достаточно показать, что существует отношение между разделением в производном множестве этих двух факторов, удовлетворяющее сильным условиям бимоделирования [12]. Это сильное бимоделирование обозначают так \propto .

2.2 Бимоделирование для временного процесса в алгебре. В [13] понятие бимоделирования распространено на временные CCS. Как показано в [1], времена в TCCS и действия рассмотрены раздельно, семантика языка изложена в терминах двух различных систем перехода. Сильное бимоделирование гарантирует эквивалентным факторам оба типа переходов, и что получающиеся факторы также будут сильно бигомотетичны. Также определяется слабая форма бимоделирования.

Два фактора считаются эквивалентными, если они могут представлять ту же самую последовательность задержек или явных действий еще до введения τ действий для любого типа последовательности, и получающиеся при этом факторы также будут эквивалентными.

2.3 Бимоделирование для вероятностных процессов в алгебре. Для вероятностных процессов в алгебре маркированная система перехода, лежащая в основе языка, может быть распространена и для формирования *вероятностной маркированной системы перехода* [14, 15]. В этой системе вероятностная мера μ определена с помощью переходов маркированного перехода системы $\mu : P \times Act \times P \rightarrow [0,1]^P$. Если рассмат-

ривать все переходы в ряде элементов процесса, то данное действие может быть распространено на вероятностную меру $\nu : P \times Act \times 2^P \rightarrow [0,1]$, таким образом, что

$$\nu \left(\xrightarrow{a} S \right) = \sum_{P' \in S} \mu \left(\xrightarrow{a} P' \right)$$

Предложенные для CCS и TCCS понятия **бимоделирования** являются отношениями эквивалентности. Таким образом, они образуют классы эквивалентности по множеству всех элементов процесса P . *Вероятностное бимоделирование* определяет отношение эквивалентности таким образом, что для любых двух факторов в классе эквивалентности и для любого действия $\alpha \in Act$ и любого класса эквивалентности S вероятностная мера ν одна и та же для каждого из факторов, выполняющих α действие и приводящих к фактору в S .

Определение 2.2 Вероятностное бимоделирование \xrightarrow{p} является отношением эквивалентности для P таким образом, что всякий раз, когда $P \xrightarrow{p} Q$, для всех $\alpha \in Act$, и для всех $S \in P \setminus \infty$

$$\nu \left(\xrightarrow{a} S \right) = \nu \left(\xrightarrow{a} Q \right)$$

Определение вероятностной меры μ и, следовательно, также ν , не зависит от того, является ли процесс алгебры реактивным или порождающим. В [14] определено $\mu \left(\xrightarrow{a} P \right)$ для реактивной системы, как вероятность того, что P выполняет действие α при условии, и что P' производная:

$$\sum_{P' \in P} \mu \left(\xrightarrow{a} P' \right) = 1$$

Напротив, для порождающей системы [15] определяют $\mu \left(\xrightarrow{a} P \right)$ так, что вероятность того, что P выполняет переход $\xrightarrow{a} P'$ при условии:

$$\sum_{\substack{a \in Act \\ P' \in P}} \mu \left(\xrightarrow{a} P' \right) = 1$$

2.4 Бимоделирование и эквивалентность от объекта к объекту. При исследовании моделирования может появиться необходимость в различных эквивалентностях для различных моделей. Чтобы установить, что модель при исследовании представляет систему, рассматривают эквивалентность системы и модели.

Это – *модельная модификация* и она используется для того чтобы гарантировать, что модель есть подходящий инструмент для изучения поведения системы. Впоследствии, это может быть необходимо, для того чтобы управлять или сравнивать модели для получения дальнейших данных о системе или находить альтернативные

представления системы. Исследователь модели должен убедиться, что такая манипуляция не изменяет поведения модели и не нарушает отношения с системой. Это приводит к анализу эквивалентности от модели к модели. Когда модели являются большими и сложными, модельные стратегии упрощения могут потребовать усложнения модели. Один из таких подходов к модельному упрощению есть поиск эквивалентности от состояния к состоянию, который позволяет одному *макросостоянию* [16] заменять ряд эквивалентных состояний.

Как показано в разделе 1, процесс алгебры моделирует понятия *состояния* и *модель* взаимозаменяемыми, оба представляемые как выражения языка. Система в численной форме или спецификации также часто выражается как фактор. Таким образом, очевидно, что понятие бимоделирования эквивалентности обеспечивает аппарат для изучения эквивалентности каждой формы от объекта к объекту. Для производного множества найдены эквивалентности от состояния к состоянию, бимоделирование между факторами при рассмотрении разделения индуцированного производного множества для отношения бимоделирования. В литературе упоминалось краткое рассмотрение модельного метода упрощения, но оно используется редко, чтобы показать сложность обнаружения отношения бимоделирования между факторами с помощью подхода *бимоделирования* ∞ .

Из-за его формальной природы, основанной на маркированной системе перехода языка, отношение бимоделирования может быть охарактеризовано эквациональными законами. Эти абстрактные законы могут быть применены к любой модели, приводящей к модификациям, которые гарантируют сохранность поведения модели. Формальная природа этих законов делает возможным обеспечение модельной манипуляции с помощью ЭВМ [17].

Отношение конгруэнтно относительно алгебры, если оно сохранено во всех алгебраических контекстах. Отношения бимоделирования, которые полностью являются также отношениями конгруэнтности, служат дополнением композиционной природе алгебры процесса. Например, если заменяется фактор в любом языковом выражении любым бигомотетичным объектом, то получающееся выражение бигомотетично к оригинальному выражению. У этого свойства есть отличные преимущества. Например, модельная модификация может быть приближена путем биподобия между компонентами системы и модельными компонентами.

3 Моделирование характеристик и эквивалентности. При моделировании характеристик используются сети организации очередей или стохастические сети Петри. При моделировании вообще будут различные представления объектов – системы и модели – состояния. Это означает,

что три класса эквивалентности от объекта к объекту, изложенных в предыдущем разделе в общих чертах даются начальные понятия эквивалентности для характеристик моделей. В данном разделе рассмотрены эквивалентности от модели к модели и от системы к модели. Более подробно разработано понятие эквивалентности от состояния к состоянию. Вместе с получающимися методами агрегирования это будет рассмотрено отдельно в разделе 4.

3.1 Модификация модели характеристик.

Установление модельной модификации или эквивалентность системы к модели важно, для того чтобы гарантировать особенности характеристик, полученных для модели, и при исследовании будет близко к особенностям характеристик системы. Когда система существует, то модельная модификация может быть выполнена при сравнении данных, полученных для системы и модели в тождественных обстоятельствах. Такой подход является достаточно дорогостоящим в терминах строгого контроля системы, далеко идущего модельного выполнения и количества данных, которые должны быть собраны и проанализированы. Как отмечено в [1], при некоторых обстоятельствах модель используется как промежуточное представление системы. В этом случае результаты аналитической модели проверены с помощью результатов моделирования, когда контекст операции, как предполагается, одинаков для обоих. Очевидно, это предполагается при условии, что моделирование есть точное представление системы.

Когда система не существует, поскольку одна спроектирована, модель должна быть проверена расчетом. К сожалению, как показано в [1], если даже формально разработан проект системы, то будет вообще использоваться система обозначений отличная от модели характеристик. Таким образом, сравнение поведения этих двух (модели и системы) является часто экспериментальным. Недавняя работа с использованием формального описания системы как основания для моделирования характеристик является основанием для модельной модификации. Используется формальный язык, такой, например, как PEPA, предназначенный для аннотации расчета системы, чтобы сформировать характеристики модели. Таким образом, система, т. е. проект, является по определению той же самой моделью характеристики, и поэтому исчезают задачи модельной модификации.

Была проведена некоторая формальная работа над областью эквивалентности системы и модели, преимущественно нацеленная на моделирование. Например, в ранней работе, основанной на теории систем [18], разработана идея эквивалентности в ограниченных явных контекстах. Эти контексты называют *экспериментальными структурами*. Предполагается, что поведение пары ввода – вывода характеризует фиксированный ответ систе-

мы на окружающую среду. Эквивалентность определена как генерирование множества пар ввода – вывода. Экспериментальная структура ограничивает входы, которые можно рассмотреть, и результаты, которые могут появиться.

В работе [18] также рассмотрены экспериментальные структуры как основание для эквивалентности от модели к модели и модельное упрощение. Имея полное представление поведения пары ввода – вывода, система, которую называют *основной моделью*, сформируется как *эквивалентная модель*, которая будет иметь тождественное поведение в данной экспериментальной структуре. Эквивалентная модель формируется при комбинировании компонент основной модели и упрощении взаимодействий между ними.

3.2 Эквивалентность от модели к модели.

Для моделей характеристик, основанных на сетях организации очередей и сетях Петри, каждая модель имеет два представления: одно в виде парадигмы типовой конструкции, другое – как основной марковский процесс. Проведена небольшая работа с понятиями эквивалентности от модели к модели на уровне парадигмы моделирования. Большинство понятий эквивалентности возникает исключительно из рассмотрения основного марковского процесса. Исключение составляет работа [19] для SAN, основанная на экспериментальном подходе к структуре [18].

В работе [19] используется структура выигрыша, включенная в SAN модели для определения экспериментальной структуры модели. Была разработана с помощью конструктивного метода SAN-модель, представляющая систему – основная модель. Тогда структура выигрыша определена с помощью численного критерия качества работы.

Эта структура выигрыша определяет экспериментальную структуру, в терминах которой вид модели не может быть изменен при условии, что должна быть обеспечена целостность критериев качества работы. Предлагаются упрощенные методы, чтобы привести пространство состояний при формировании эквивалентной модели, которая все еще остается марковской, в контексте этой экспериментальной структуры. Эти методы применены на уровне SAN-модели вместо непосредственного управления марковским процессом. Как предусмотрено в [18], экспериментальные структуры таковы, что различные критерии качества работы могут привести к различным эквивалентным моделям.

Подобный подход к модельному упрощению для PEPA, приводящий к объединению производных (состояний), представлен в [1].

В [20] авторы определяют понятие эквивалентности между самими моделями GSPN, и между GSPN и моделью SPN. Эта эквивалентность подразумевает эквивалентность основного марковского процесса, но это более сильное условие. Так как показатели характеристик часто опреде-

ляются в чистом виде, то авторы утверждают, что дополнительные условия необходимы, чтобы гарантировать, что те же самые критерии качества работы могут быть получены из самих моделей. Эти условия дают компенсацию за любую информацию, которая потеряна в движении от последовательности *маркировки GSPN* к *переходу* последовательности в марковском процессе, если найдется более чем один переход между парами маркировки, то он представляется как единственный переход в марковском процессе. Эта эквивалентность была разработана с очевидной целью. Она используется, чтобы доказать что для любого GSPN эквивалентного SPN может быть построена модель, таким образом, что непосредственные переходы не необходимы.

Эквивалентности марковских процессов.

Обычное понятие эквивалентности марковских процессов интуитивно. Два марковских процесса эквивалентны, если у них найдется одно и то же число состояний и одни и те же оценки перехода между этими состояниями. Это подразумевает изоморфизм состояний двух процессов, для которых найдется одна и та же бесконечно малая образующая матрица Q (с точностью до перестановки строк и столбцов). Из этого следует, что вероятность распределения переходного и установленвшегося состояний одна и та же.

Это понятие эквивалентности существенно отличается от используемой в алгебрах процесса эквивалентности типа бимоделирования. Оба понятия касаются процессов, которые имеют одинаковое поведение: процессы, которые при повторении покажут ту же самую картину. Однако, эта картина отличается в марковском процессе и в мире алгебры процесса. В марковском процессе история развития процесса рассматривается как последовательность состояний, в которых находится процесс. По алгебре процесса история процесса рассматривается как последовательность действий, в которых участвует процесс.

Эквивалентность марковского процесса очень точна и не допускает при практическом использовании манипуляций или преобразований в терминах модели. Рассмотрены несколько более смягченных форм эквивалентности, которые называют *почти эквивалентностями*. Эти эквивалентности были использованы для идентификации марковских процессов, которые поддаются эффективному решению, хотя и находятся вне специфического класса процессов, но могут быть заменены соответствующими процессами этого класса.

Классы процессов, которые были рассмотрены в этих эквивалентностях, охарактеризованы образующей матрицей, имеющей специфическую структуру. Например, *полностью разложимая* матрица состоит из стохастических блоков вдоль основной диагонали, а остальные нули. *Почти полностью разложимая* матрица, у которой в блоках вниз от главной диагонали есть элементы,

порядок величин которых, по крайней мере, больше, чем любой элемент вне этих блоков [21]. Полнотью разложимые и почти полностью разложимые марковские процессы определены очевидным способом. Таким образом, если процесс будет почти полностью разложимым, то его можно заменить на полностью разложимый *эквивалентный* процесс. Он может быть разрешен при рассмотрении подмодели с отдельно блокируемой соответствующей диагональю. Разложимость использовалась экстенсивно в сетях организации очередей. Подобное понятие, *почти независимости*, было недавно разработано для GSPNs [22].

В недавней работе [23] разработано понятие *почти укрупняемости*, которое может быть отнесено к любой марковской базовой модели, и обеспечивает метод для приведения пространства состояний. Укрупняемость рассмотрена более подробно в разделе 4.2.

4 Эквивалентность отношения от состояния к состоянию. Чтобы заняться задачей пространства состояний, имеются модельные методы упрощения, рассмотренные для моделей характеристик и в парадигме, и на уровне марковского процесса. Один такой метод, а именно, *агрегирование*, может быть formalized в терминах эквивалентности от состояния к состоянию в пространстве состояний модели. Когда эквивалентность найдена, тогда множество эквивалентных состояний может быть сформировано в одно *макросостояние*, приводящее к полному пространству состояний модели. В следующем разделе будет кратко сформулирована процедура агрегирования.

4.1 Агрегирование марковских процессов. Отношение эквивалентности, определенное на пространстве состояний модели, индуцирует разделение пространства состояний. Построив такое разделение и сформировав соответствующий *объединенный* процесс, достигаем агрегирования. В объединенном процессе каждое разделение состояний из первоначального процесса формирует одно состояние. В некоторых случаях это разделение будет основано на определенном отношении эквивалентности к состоянию первоначального процесса. В других случаях разделение будет абстрактным или искусственным, но это определит отношение эквивалентности к пространству состояний естественным путем. Таким образом, можно всегда предполагать, что разделение есть основное отношение эквивалентности. Пусть первоначальное пространство состояний

X_1, X_2, \dots, X_n , тогда объединенное пространство состояний $X_{[1]}, X_{[2]}, \dots, X_{[n]}$, где $N < n$, в идеале, $N \ll n$.

Бесконечно малая образующая матрица объединенного процесса сформирована интуитивным путем. Если оценки перехода первоначального процесса обозначены так $q(X_i, X_k)$, тогда оценка

перехода данного состояния в любое разделение

$$q \mathbf{X}_{[j]}, X_{[j]} \geq \sum_{k \in [l]} q \mathbf{X}_i, X_k$$

Переходы между объединенными состояниями сформированы как взвешенная сумма переходов оценки состояний от первого разделения ко второму разделению, причем условные вероятности установившегося состояния таковы, что для каждого состояния разделения, $\prod_j \mathbf{X}_j$,

$$q \mathbf{X}_{[j]}, X_{[i]} \geq \sum_{k \in [l]} \prod_j \mathbf{X}_k \geq q \mathbf{X}_i, X_{[i]}$$

Точное вычисление вероятностей установившегося состояния, $\prod_j \mathbf{X}_k$, повлечет за собой нахождение распределения установившегося состояния первоначального процесса. Однако, процедуры агрегирования включают изобилие повторяющихся процедур, основанных на приближении этих значений. Альтернативно, если разделение основано на структурном свойстве модели, для которой возможно вычислить эти значения при особом анализе соответствующей подмодели. Всесторонний обзор методов агрегирования представлен в [16].

В объединенном процессе, вообще говоря, марковость не сохраняется. Однако предполагается, что объединенный процесс будет марковским, и это позволяет в каждом адекватно вычисленном разделении определить вероятность установившегося состояния.

Случай, когда объединенный процесс будет марковским процессом, опирается на условие, известное как *укрупняемость*. Случай агрегирования, в котором объединенную модель рассматривают как марковский процесс, хотя свойство марковости не сохранено, иногда называют *псевдо-агрегированием* [24].

4.2 Укрупняемость. Особенность объединенного процесса будет зависеть от отношения эквивалентности, приводящего к формированию разделения, на котором базируется агрегирование. Когда разделение таково, что марковость сохранена в объединенном процессе, то обычно говорят, что *процесс обладает сильным укрупнением относительно разделения* [25]. Такое разделение сформировано на основании строгого понятия эквивалентности состояний. В случае укрупнения решение для установившегося состояния объединенного процесса может быть найдено без условной вероятности состояний для каждого разделения. Кроме того, это распределение установившегося состояния может использоваться для получения точного решения первоначальной модели.

Определение 4.1 Марковский процесс является (как обычно) укрупнением относительно разделения $\chi = \mathbf{X}_{[l]}$, если для каждого начального распределения объединенный процесс есть марковский процесс.

Теорема 4.1 ([25]), Марковский процесс есть укрупнение относительно разделения $\chi = \mathbf{X}_{[l]}$, тогда и только тогда, когда для любой $X_{[l]}, X_{[l]} \in \chi$, $X_i, X_j \in X_{[l]}$ $q \mathbf{X}_i, X_{[l]} \geq q \mathbf{X}_j, X_{[l]}$

Сильно разделенное укрупнение существует, если найдется отношение эквивалентности такое, что для любых двух состояний в разделении индуцировано отношение эквивалентности оценки их объединенного перехода к любому другому разделению. Связь понятий *точного укрупнения* и *сильного разделенного укрупнения* [26], определены следующим образом.

Определение 4.2 χ точное разделенное укрупнение, если для любых $X_{[l]}, X_{[l]} \in \chi$, и для любых $X_i, X_j \in X_{[l]}$ имеет место

$$q \mathbf{X}_{[l]}, X_i \geq q \mathbf{X}_{[l]}, X_j$$

Таким образом, точно разделенное укрупнение имеет место, если найдется отношение эквивалентности для любых двух состояний в разделении, индуцированное отношением эквивалентности оценок состояний при объединенном переходе для любого другого разделения. Здесь оценка состояний при объединенном переходе определена очевидным способом. Для сильного разделенного укрупнения объединенный поток состояний должен быть эквивалентным в прямом и обратном направлении.

Определение 4.3 χ будет строгим укрупнением тогда и только тогда, если оно является и обычным укрупнением и точным укрупнением.

Методы агрегирования вообще, и укрупняемость в частности, обычно применяются с помощью пространства состояний модели, рассмотренной как единое целое. В недавней работе [27] показано, что эквивалентность укрупняемости, выраженная в терминах тензорной алгебры, конгруэнта классу марковских процессов.

4.3 Свертывание в GSPNs. Другой подход к модельному упрощению, основанному на эквивалентностях от состояния к состоянию, называется методом *свертывания* в GSPNs [28]. Этот метод приводит к некоторой потере деталей пространства состояний. На разрешенных переходах сформировано по маркировкам GSPN разделение с использованием базисного отношения эквивалентности. Для построения более компактной модели используется идентификация эквивалентных маркировок, производящая более малый марковский процесс. Использование разделенного укрупнения подобно агрегированию. У этого подхода есть преимущество, чтобы построить марковскую образующую матрицу первоначальной модели, которая может быть достаточно большой.

5 Понятия эквивалентности для PEPA. В [1] разработаны четыре различных понятия эквивалентности для PEPA, два из которых основаны на бимоделировании. В отличие от других характеристик, моделирование парадигмы PEPA по-

зволяет моделям и состояниям быть представленными как эквивалентные объекты - оба являются компонентами. Таким образом, можем использовать разработанные отношения эквивалентности, для того чтобы проанализировать обе модели, а именно, смоделировать эквивалентность от состояния к состоянию. Для каждой эквивалентности рассматривают ее значения для основного марковского процесса и оценивают её потенциал для использования как основание для метода упрощения модели.

В [1] разработаны *изоморфизм* и структурная эквивалентность, подобная эквивалентности между марковскими процессами, описанными в разделе 3. Это отношение слишком строго, чтобы быть использованным для модельного упрощения, но это обеспечивает выполнение эквационных законов, которые могут быть применены для преобразования модели. Также представлена более слабая форма отношения, *слабый изоморфизм*. Это зависит от того как компоненты представлены исследователю. Два компонента рассматриваются как эквивалент, если они отличаются только в деталях их внутренних действий. Отношение приводит к полезному подходу модельного упрощения, которое может быть вычислено различными способами согласно критериям качества работ [19].

Третье понятие эквивалентности, разработанное в [1], *сильное биподобие*, которое основано на маркированной мульти-системе переходов, представленной в [1] семантикой PEPA. Хотя это отношение является конгруэнтным, этого не достаточно, для того чтобы гарантировать эквивалентное поведение. Это иллюстрируют задачи, которые могут появиться из-за потери информации в движении от процесса алгебры к основному марковскому процессу. Однако обстоятельства, при которых сильно бигомотетичные компоненты окажутся того же идентифицированного поведения, приведут к определению модельного метода упрощения.

В [1] альтернативное понятие эквивалентности, названо *сильной эквивалентностью* в стиле сильного вероятностного бимоделирования [14]. Эта эквивалентность подобным способом использует оценку деятельности вероятностей, используемых в вероятностных системах. Отношение эквивалентности сформировано с помощью полных оценок переходов между разделением, индуцированным отношением эквивалентности. В основном марковском процессе показаны отношения между сильной эквивалентностью и укрупняемостью. В [1] также показано, что сильная эквивалентность конгруэнтна и использована для модельного упрощения для одной из систем MSMQ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hillston J. A Compositional Approach to Performance Modelling. Cambridge University Press, 1996.
2. Сорокин А.С. Применение полумарковских процессов к определению характеристик надежности технологических схем. // Вестник Кузбасского гос. тех. унив., 2005. № 1. С. 3 -9.
3. Сорокин А.С. Структурное моделирование надежности технологических систем с использованием скелетонов// Вестн. Кузбасского гос. тех. унив., 2008. № 4(68). Кемерово, С. 31-45.
4. Сорокин А.С. Математическое моделирование оценки надежности технологических систем// Вестн. Кузбасского гос. тех. унив., 2008. № 5(69). Кемерово, С. 28-37.
5. Сорокин А.С. Применение методов теории вероятностей к исследованию некоторых процессов производства./Труды 4-ой междунар. Конф. Кибернетика и технологии XXI века. Воронеж, 2003. С. 312-323.
6. Сорокин А.С. Марковские процессы в теории надежности технологических систем гидродобычи угля // Вестн. Кузбасского гос. тех. унив., 2008. № 1. С. 61-69.
7. Коэн Дж., Боксма О. Граничные задачи в теории массового обслуживания. М.: МИР, 1987.
8. Королюк В.С., Томусяк А.А. Описание функционирования резервированных систем посредством полумарковских процессов. //Кибернетика, вып.5, 1965.
9. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их применение. Наука, М., 1969. 511C.
10. Сорокин А.С. Алгоритм решения систем уравнений Колмогорова (Оценка качества системы).//Вторая Всероссийская научная конф. Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB. М., 2004. С. 389 – 397.
11. Черчлин У., Акоф Л. Введение в исследование операций. М.: Наукова Думка, 1968.
12. Milner R. Communication and Concurrency. Prentice-Hall, 1989.
13. Moller F. , Tofts C. A Temporal Calculus for Communicating Systems. In J.C.M.Baeten and J.W. Klop, editors, CONCUR'90, volume 458 of LNCS. Springer-Verlag, August 1989.
14. Larsen K. , Skou A. Bisimulation through Probabilistic Testing.// Information and Computation, 94(1). 1991.
15. Jou C.C., Smolka S.A. Equivalences, Congruences and Complete Axiomatizations of Probabilistic Processes. In J.C.M. Baeten and J.W. Klop, editors, CONCUR'90, volume 458 of LNCS . Springer-Verlag, August 1990.

16. Schweitzer P. A Survey of Aggregation-Disaggregation in Large Markov Chains. In W.J. Stewart, editor, Numerical Solution of Markov Processes. Marcel Dekker, 1990.
17. Moller F. The Edinburgh Concurrency Workbench (Version 6.0). //LFCS, Dept. of Computer Science, University of Edinburgh. August 1991.
18. Zeigler B.P. Theory of Modelling and Simulation. Krieger, 1976.
19. Sanders W.H. , Meyer J.F . Reduced base model construction methods for stochastic activity networks. //IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 9(1), January 1991.
20. Chiola G. , Donatelli S. , Franceschinis G. GSPNs versus SPNs: What is the actual role of immediate transitions? In Petri Nets and Performance Models, PNPM. Melbourne, Australia, December 1991.
21. Courtois P.J. Decomposability: Queueing and Computer System Applications. //ACM Series. Academic Press, New York, 1977.
22. Ciardo G. , Trivedi K. A Decomposition Approach for Stochastic Petri Nets. In Petri Nets and Performance Models. //IEEE Computer Society, December 1991.
23. Buchholz P. Exact and Ordinary Lumpability in Finite Markov Chains.// Journal of Applied Probability, 31(1), 1994.
24. Rubino G. , Sericola B. Sojourn Times in Finite Markov Processes. //Journal of Applied Probability, 27. 1989.
25. Kemeny J.G. , Snell J.L. Finite Markov Chains. Van Nostrand, 1960.
26. Schweitzer P. Aggregation Methods for Large Markov Chains.// In G. Iazeolla, P.J Courtois, and A. Hordijk, editors, Mathematical Computer Performance and Reliability. North Holland, 1984.
27. Buchholz P. Hierarchical Markovian Models - Symmetries and Reduction. //In R.J. Pooley and J. Hills-ton, editors, Computer Performance Evaluation: Modelling Techniques and Tools, volume 10 of EDITS. Edinburgh University Press, August 1993.
28. Balbo G., Bruell S., Ghanta S. Combining Queueing Networks and Generalized Stochastic Petri Nets for the Solution of Complex Models of System Behaviour. //IEEE Transactions on Computers, 37(10), October 1988.

□Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ , г. Новокузнецк)
Тел.: 8(3843) 772459