

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УДК 531.2: 531.4

А. А. Ордин, Ю. А. Антонов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ТЕЛА НА СИЛУ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Одной из аксиом теоретической механики является допущение, что все тела представляются абсолютно твердыми, то есть не испытывающими деформаций [1-3]. С этой точки зрения теоретическая механика не в силах объяснить природу силы трения качения. Более того, представление катящегося диска весом P , радиусом R , к которому приложены активная сила F и сила трения F_{tr} , так, как показано на рис.1 во всех учебниках, приводит к парадоксу: при равномерном движении диска сила трения и активная сила создают пару сил, которая способствует вращению диска и нет никакой другой силы, которая может его тормозить. То есть с точки зрения классической теоретической механики такой диск будет катиться вечно, если конечно пренебречь сопротивлением воздуха. Однако, практика дает другой ответ,

гает называть (по аналогии с мгновенным центром скоростей) **трением мгновенного покоя**. Действительно, так как скорость диска в точке С равна нулю, то здесь не может возникнуть трение скольжения. Нет в этой точке и трения качения по той же причине. Остается сделать вывод о наличии в этой точке трения мгновенного покоя. Мгновенного – так как в следующий момент времени точка С перемещается в новое положение, где снова возникает трения покоя и т.д.

Известно, что силы трения покоя являются наибольшими по сравнению с силами трения скольжения и качения [1,2]. Поэтому, при качении диска в точке его соприкосновения с поверхностью постоянно возникает, исчезает и снова возникает значительное трение мгновенного покоя, которое и является причиной торможения диска. Природа этого трения объясняется силами молекулярного сцепления или адгезией в точке или линии контакта между диском и поверхностью.

Исходя из присутствия в точке контакта трения мгновенного покоя, становится понятно, что силу трения качения нельзя показывать в этой точке как вектор. Действительно, если тело находится в состоянии покоя, то мы не можем показать силу трения покоя до тех пор, пока тело не сдвинется с места.

При изучении трения качения нужно еще учесть соприкосновение в узкой области шероховатых поверхностей. Действительно, абсолютно твердые тела тем не менее не являются абсолютно гладкими, то есть они имеют различную шероховатость. Отсюда становится понятно, что в очень небольшой области контакта (вблизи точки С) возникает разность скоростей соприкасающихся точек неровностей катящегося диска и неподвижной поверхности. В этих соприкасающихся точках скорость диска близка к нулю, но не равна нулю, и в этой области возникает трение скольжения.

Таким образом, для абсолютно твердых тел трение качения, по нашему мнению, состоит из трения мгновенного покоя, находящегося в мгновенном центре скоростей, и трения скольжения соприкасающихся шероховатых поверхностей двух тел.

Реальная картина качения тела, безусловно, всегда сопровождается деформацией поверхностей соприкасаемых тел. Рассмотрим, как влияет деформа-

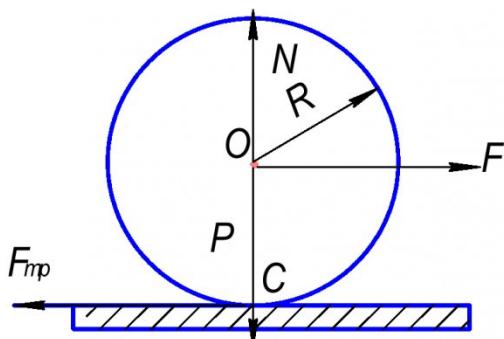


Рис.1. Классическая схема действия сил при трении качения

мы знаем, что этот диск достаточно быстро остановится даже в безвоздушной среде.

Рассмотрим кинематику движения абсолютно твердого, недеформируемого диска по горизонтальной поверхности, обладающей такими же свойствами (рис.1). Такой диск совершает плоскопараллельное движение, которое, как известно, характеризуется наличием мгновенного центра скоростей в точке С. Как известно, в мгновенном центре скоростей скорость диска равна нулю [1,2]. В этом заключается одно из принципиальных отличий трения качения от трения скольжения, которое всегда характеризуется различием скоростей между перемещаемыми поверхностями. Следовательно, в точке С диска существует особый вид трения, который автор предла-

ция тел на силу трения качения.

Исторически, трение качения объяснялось только с точки зрения деформации соприкасающихся тел (рис.3). Это было необходимо, так как деформация поверхностей тел позволяет сместить реакцию связи от точки С в точку В и тем самым обеспечить появление момента сил сопротивления качению. Далее, исходя из равномерного перемещения диска следует равенство вращающего момента пары сил F и F_{mp} (с плечом R) и момента сил сопротивления, вызванного действием другой пары сил P и N (с плечом k):

$$Nk = Pk = FR = F_{mp}R \quad (1)$$

Отсюда вытекает известная формула Амонтона-Кулона для расчета силы трения качения [1,2]:

$$F_{mp} = P \frac{k}{R}, \quad (2)$$

где длину плеча k момента силы сопротивления, имеющей размерность длины, называют коэффициентом трения качения [1,2].

Авторы учебников по теоретической механике [1,2] здесь обычно делают вывод о том, что сила трения качения обратно пропорциональна радиусу диска.

На наш взгляд, последний вывод, принципиально, неверен. Действительно, если учесть, что реакция связи горизонтальной поверхности равна весу диска ($N=P$), а вес диска в свою очередь зависит от его радиуса R и ширины b :

$$P(R) = \gamma V = \gamma \pi b R^2$$

то подстановка последней формулы в зависимость

$$F_{mp} = P(R) \frac{k}{R} = \gamma \pi b R^2 \frac{k}{R} = \gamma k \pi b R \quad (3)$$

где γ -удельный вес диска, V -объем диска.

Таким образом, сила трения качения с учетом зависимости веса диска от его радиуса прямо пропорциональна радиусу диска.

Рассмотрим вместо диска качение шара радиусом (R). Как известно, зависимость его веса от радиуса является кубической:

$$P(R) = \gamma V = \frac{4}{3} \gamma \pi R^3$$

В этом случае зависимость силы трения качения шара от его радиуса становится квадратичной:

$$F_{mp} = P(R) \frac{k}{R} = \frac{4}{3} \gamma \pi R^3 \frac{k}{R} = \frac{4}{3} \gamma k \pi R^2 \quad \dots(4)$$

Кроме того, так как основной закон трения Амонтона-Кулона заключается в том, что при любом виде трения сила трения равна произведению коэффициента трения на силу давления ($F_{mp} = fP$), то коэффициент трения качения должен быть равен отношению:

$$f = \frac{F_{mp}}{P} = \frac{kN}{PR} = \frac{k}{R} = \sin(0.5a) = \tan\varphi$$

так как в нашей задаче реакция опоры равна весу диска ($N=P$). Отсюда также следует, что, так как величина k представляет собой длину плеча момента реакции опоры, то коэффициент трения качения является безразмерной величиной, также как и коэф-

фициент трения скольжения. Угол α является центральным углом, стягивающим дугу AB окружности, по которой происходит деформация диска, а φ – угол трения.

Приближенно угол деформации тел можно определить по формуле:

$$\sin(0.5a) \approx 0.5a = f \text{ или } a = 2f \quad (5)$$

Однако, на самом деле зависимости (3, 4) силы трения и коэффициента трения качения от радиуса диска с учетом деформации тел более сложные. Рассмотрим эту постановку задачи.

Известно, что в области контакта двух тел действуют повышенные напряжения, максимальные

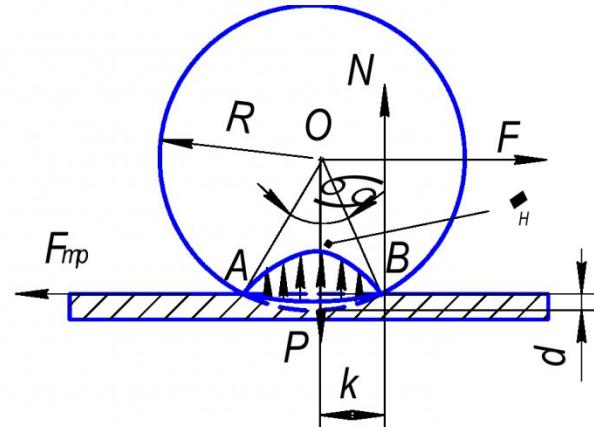


Рис.2. Схема трения качения с учетом деформации тел

значения которых определяются по формуле Г.Герца [4], которая применительно к нашей задаче (рис.2) выглядит следующим образом:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{P}{b\pi R \left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}} \quad (6)$$

где v_1 , v_2 , E_1 , E_2 – соответственно коэффициенты Пуассона и модули Юнга для диска и поверхности тела. Примем для простоты, что диск и поверхность тела выполнены из стали. В этом случае с учетом коэффициента Пуассона для стали ($v=0.28$) и веса диска (6) формула Г. Герца упрощается:

$$\sigma_H = 0.418 \sqrt{\frac{PE}{bR}} = 0.418 \sqrt{\frac{\gamma \pi b R^2 E}{bR}} = 0.418 \sqrt{\gamma \pi R E} \quad (7)$$

где E – модуль Юнга или модуль упругости первого рода для стали.

Определим продольную максимальную деформацию ($0.5d$) из закона Гука [5] с учетом одновременной одинаковой деформации диска и поверхности тела (рис.2):

$$\sigma_H = E \varepsilon = E \frac{0.5d}{R} \quad (8)$$

Отсюда величина продольной деформации диска с учетом формулы (7) равна:

$$d = 0.5d = \frac{\sigma_H R}{E} = 0.418 \sqrt{\frac{\gamma \pi R^3}{E}} \quad (9)$$

Определим длину плеча k (рис.2) как длину по-

ловины хорды АВ из соотношения:

$$k = 0,5L_{AB} = \sqrt{R^2 - (R - \delta)^2} \quad (10)$$

откуда, учитывая малость величины продольной деформации по сравнению с диаметром диска, получаем:

$$k = \sqrt{2R\delta - \delta^2} \approx \sqrt{2R\delta} \quad (11)$$

Подставляя в эту формулу значение продольной деформации (9)), получаем зависимость для расчета длины плеча момента сопротивления:

$$k = 0,91R^4 \sqrt{\frac{\gamma\pi R}{E}} \quad (12)$$

Реакция опоры N может находиться в любой точке правой половины дуги АВ (рис.2). В предельном случае она находится в точке В, расположенной на расстоянии k от середины отрезка АВ. Отсюда можно найти предельное значение силы трения качения, используя равенство моментов двух пар сил (1), вес диска и формулу (12): (13)

$$F_{mp} = \frac{P(R)k}{R} = 0,91P(R)^4 \sqrt{\frac{\gamma\pi R}{E}} = 0,91\gamma\pi bR^2 \sqrt{\frac{\gamma\pi R}{E}}$$

Отсюда можно получить предельный коэффициент трения качения (f), учитывая основной закон Амонтона-Кулона(2):

$$f = \frac{F_{mp}}{P} = 0,914 \sqrt{\frac{\gamma\pi R}{E}} = 1,214 \sqrt{\frac{\gamma R}{E}} \quad (14)$$

Из проделанного анализа можно сделать следующие выводы:

- предельная сила трения качения представляет собой нелинейную возрастающую зависимость от радиуса диска и его удельного веса,
- коэффициент трения качения представляет собой безразмерную величину и может определяться теоретически для стальных поверхностей по формуле (14), из которой следует, что коэффициент трения качения нелиней-

но возрастает с увеличением радиуса диска и его удельного веса, и убывает с возрастанием модуля упругости тела.

Определим практически коэффициент трения качения для стальных поверхностей двух тел при заданных параметрах: радиус диска равен $R= 1000$ мм, модуль упругости для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа $= 2 \cdot 10^5$ Н/мм², удельный вес стали $\gamma = 7,8$ т/м³ $= 7,8 \cdot 10^{-5}$ Н/мм³ по формуле (14):

$$f = 1,214 \sqrt{\frac{\gamma R}{E}} = 1,214 \sqrt{\frac{7,8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5}} = 0,00056 \quad (15)$$

По справочным данным коэффициент трения качения «сталь по стали» составляет 0,0005 ч 0,001 [7]. Таким образом, полученная нами теоретическая формула для расчета предельного коэффициента трения качения показывают хорошую сходимость с практическими данными.

В более общем случае, когда диск и поверхность выполнены из других материалов с одинаковыми коэффициентами Пуассона и модулями упругости длина плеча момента реакции опоры, предельная сила трения и коэффициент трения качения определяются по формулам:

$$k = R \sqrt{\frac{\sigma}{E}} = R^4 \sqrt{\frac{\gamma R}{2E(1-\nu^2)}} \quad F_{mp} = \gamma\pi bR^2 \sqrt{\frac{\gamma R}{2E(1-\nu^2)}}$$

$$f = \frac{k}{R} = \sqrt{\frac{\gamma R}{2E(1-\nu^2)}} \quad (16)$$

Таким образом, на наш взгляд, полученные зависимости коэффициента и силы трения качения от радиуса диска и его механических характеристик позволяют с достаточной степенью точности рассчитывать эти значения теоретически и изменяют существующие представления о трении качения, основанные на законах Амонтона-Кулона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2009.– 416с.
2. Никифорова, В. М., Курс теоретической механики / В. М. Никифорова, А. А. Яблонский. – М.: Высшая школа, 2006. – 608 с.
3. Яворский, Б. М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. Изд.8-е.– М.: Оникс. Мир и образование, 2008. – 1056 с.
4. Иванов, М. Н. Детали машин. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.
5. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, Б. П. Державин, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 2008.– 560 с.
6. Ордин, А. А. Некоторые дополнения к законам трения Амонтона-Кулона / Сб.докладов III Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». – Алматы, 2009.
7. Кухлинг, Х. Справочник по физике. Пер. с немецкого. – М.: Мир, 1985. – 520 с.

Авторы статьи:

Ордин

Александр Александрович,
докт. техн. наук, зав. лаб.подземной
разработки угольных месторождений
Института горного дела СО РАН им.
Н.А.Чинакала, профессор НГУ.

e-mail: ordin@misd.nsc.ru

Антонов

Юрий Анатольевич
канд.техн.наук, доц. каф. горных
машин и комплексов КузГТУ
Тел. 8-3842-39-63-03