

## ГЕОМЕХАНИКА

**УДК 622.241.54**

**Н.В. Черданцев, В.Т. Преслер**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ПО ПРОЧНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД**

Одной из фундаментальных проблем эффективной разработки угольных месторождений является прогноз следствий техногенного воздействия на массив горных пород (вывалы, потеря устойчивости, газодинамические проявления), которые в первую очередь обусловлены разрушениями массива в окрестности системы горных выработок вследствие их проведения. Поэтому остро встаёт проблема количественной оценки геомеханической обстановки при ведении горных работ, согласно которой производится выбор рациональных технологических схем отработки угольного месторождения. В связи с этим актуальна задача создания методического обеспечения для оценки геомеханического состояния массива в области ведения горных работ.

Существующие модели достаточно полно учитывают такие свойства изотропного массива как упругость, пластичность, ползучесть. Однако одно из его основных свойств - прочностная анизотропия, обусловленная наличием поверхностей ослабления (слоистость, кливаж, другие типы ослаблений), практически не используется в анализе его геомеханического состояния. В то время как разрушение массива, в первую очередь, происходит по этим поверхностям ослабления. Учёт прочностной анизотропии позволяет получить обоснованные оценки нарушенности массива и в соответствии с ними дать достоверную картину устойчивости выработок. Решение задачи о геомеханическом состоянии массива с системами регулярных поверхностей ослабления сопряжено с определёнными трудностями. Поскольку для оценки прочности такого массива необходимо формулировать условия прочности по этим поверхностям, то поле напряжений должно быть непрерывным, т.е. в каждой точке массива определимым. Такое поле можно получить, решая задачу, например, аналитическими методами. Однако класс задач, решаемых аналитическими методами, ограничен, а численные методы - конечных элементов и конечных разностей определяют дискретное поле. В связи с этим, единственным методом, определяющим непрерывное поле напряжений, является метод граничных элементов. Этот метод основывается на подходе Грина, в котором

массив рассматривается как бесконечная среда с вырезами (полостями) произвольных очертаний, нагруженных со стороны массива естественным полем напряжений, а изнутри – фиктивной нагрузкой. В математической постановке это приводит к интегральному уравнению краевой задачи теории упругости [1], которое является сингулярным и решается численно – методом механических квадратур. Сначала поверхность полости разбивается на конечное число элементов -  $N$ , а интеграл заменяется суммой; фиктивная нагрузка, напряжения естественного поля, реакция крепи по каждому элементу заменяются равнодействующими, при этом считается, что они в пределах элемента постоянны. В результате этой процедуры получаются  $3N$  уравнений относительно проекций вектора фиктивной нагрузки. После решения системы алгебраических уравнений напряжения в любой точке массива определяются суммированием напряжений от действия фиктивной нагрузки и естественного поля напряжений. Нормальные и касательные напряжения по поверхности ослабления, задаваемой в пространстве углами падения  $\alpha$  и простирации  $\beta$ , образованными нормалью к поверхности и осями  $z$  и  $x$ , связаны с компонентами непрерывного поля  $\sigma_{qm}$  известными формулами теории напряжённого состояния в точке. Поскольку в этом методе конечными элементами аппроксимируется только граница вырезов, а не сам массив, то напряжения можно определить в любой произвольной точке этого массива, что обеспечивает определение непрерывного поля напряжений и построение непрерывной картины нарушенности массива в виде зон нарушения сплошности (ЗНС) согласно критерию разрушения Мора – Кузнецова. А применение коэффициента нарушенности  $k_n$  (отношение площади зон нарушения сплошности массива к площади попечного сечения выработки) позволяет количественно сопоставить размеры разрушений при различных горнотехнических условиях проведения выработок и разработать рекомендации по их рациональному и безопасному сооружению.

На основе метода граничных элементов создана объёмная модель, описывающая геомехани-

ческое состояние (напряжённое, нарушенности, устойчивости) массива горных пород, вмещающего систему выработок, и разработан комплекс методов её компьютерной реализации и систематизированного проведения исследований модельных сред [2, 3]. Созданная модель универсальна, т.е. определяет непрерывное поле напряжений в окрестности выработок произвольного очертания, строит ЗНС, учитывая при этом любые системы поверхностей ослабления, произвольные характеристики среды, а также опорное давление в области ведения горных работ, и на базе вычислительного эксперимента обеспечивает комплексное изучение различных модельных сред. Возможности модели были хорошо изучены в результате проведения широкомасштабных вычислительных экспериментов на модельных и физических средах в широком диапазоне варьирования их основных параметров (коэффициенты бокового давления и сцепления, угол внутреннего трения и углы падения и простирации поверхностей ослабления). Результаты применения компьютеризированной модели и разработанных методов исследования опубликованы в ряде работ [4, 5].

Однако в геомеханике существует целый класс задач, в которых в силу достаточно сложной структуры массива никак не отражены и в расчётах не учитываются свойства его неоднородности. Это в первую очередь касается массивов осадочных горных пород, в которых наряду с коренными породами (аргиллиты, алевролиты, песчаники), слагающими этот массив, имеются угольные пласты, чьи свойства существенно отличаются от свойств коренных пород. Упомянутая выше модель может быть модернизирована и использована для анализа геомеханического состояния неоднородных, анизотропных по прочности массивов горных пород, вмещающих систему выработок.

Задача о распределении напряжений в массиве, вмещающем вставку (иностранные включение с другими отличными от основной среды свойствами) может рассматриваться как совокупность двух задач теории упругости: второй внешней – для основного массива, охватывающего вставку, и второй внутренней, описывающей напряжённое состояние во вставке.

Интегральное уравнение второй внешней задачи теории упругости имеет вид [1]

$$\frac{1}{2}a_q(Q_O) - \iint_O \Phi 1_{qm}(Q_O, M_O) a_m(M_O) dO_{M_O} = \sigma^e n_m(Q_O) - F_q(Q_O) \quad (1)$$

а второй внутренней [1]

$$\frac{1}{2}a_q(Q_O) - \iint_O \Phi 2_{qm}(Q_O, M_O) a_m(M_O) dO_{M_O} = F_q(Q_O) + p \cdot n_m(Q_O) \quad (2)$$

Складывая эти два уравнения, приходим к следующему уравнению, описывающему состояние на поверхности раздела двух сред

$$a_q(Q_O) + \iint_O \left[ \Phi 2_{qm}(Q_O, M_O) a_m(M_O) - \right] a_m(M_O) dO_{M_O} = \sigma^e n_m(Q_O) + p \cdot n_m(Q_O) \quad (3)$$

В уравнениях (1) – (3) индексы  $q, m, t = 1, 2, 3$  – номера координатных осей: ось 1 -  $x$ , ось 2 -  $y$ , ось 3 - ось  $z$ ,  $\sigma_{qm}$  – компоненты тензора напряжений естественного поля (нетронутого горными работами массива) здесь принимают следующие значения  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \lambda \gamma H$ ,  $\sigma_{33} = \gamma H$ ,  $p$  – равномерное давление на вставку, например, газа.  $O$  – поверхность вставки  $\Phi 1_{qm}(Q_O, M_O)$ ,  $\Phi 2_{qm}(Q_O, M_O)$  – тензоры Грина (фундаментальные решения для поверхности вставки), соответственно, со стороны основного массива и со стороны вставки.  $\Phi 1_{qm}(Q_O, M_O)$ , например, определяется следующим образом [1]

$$\begin{aligned} \Phi 1_{qm}(Q_O, M_O) &= \frac{1}{8\pi(1-\nu_1)R^2} \times \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu_1)\left(\frac{x_q n_m}{R} - \frac{n_q x_m}{R}\right) + \\ + \left[ (1-2\nu_1)\delta_{qm} + 3\frac{x_q x_m}{R^2} \right] \frac{n_t x_t}{R} \end{array} \right\}, \\ \Phi 2_{qm}(Q_O, M_O) &= \frac{1}{8\pi(1-\nu_2)R^2} \times \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu_2)\left(\frac{x_q n_m}{R} - \frac{n_q x_m}{R}\right) + \\ + \left[ (1-2\nu_2)\delta_{qm} + 3\frac{x_q x_m}{R^2} \right] \frac{n_t x_t}{R} \end{array} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона, соответственно, основной среды и вставки,  $R$  – расстояние между точками  $Q_O$  и  $M_O$ , расположенными на поверхности вставки,  $\delta_{qm}$  – символ Кронекера,  $n_m(Q_O)$  – единичный вектор внешней к поверхности вставки нормали в точке  $Q_O$ .

Для неоднородного массива, вмещающего вырез и вставку, краевая задача сводится не к одному интегральному уравнению, а к системе интегральных уравнений, в которых учитывается взаимное влияние выреза и вставки. При этом число уравнений определяется числом вставок.

Поэтому для задачи, расчётная схема которой показана на рис. 1, имеем систему двух интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_q(Q_{O_1}) - d_{11} - d_{12} &= \sigma_{qm}^e \cdot n_m(Q_{O_1}) - F_q(Q_{O_1}) \\ a_q(Q_{O_2}) - d_{21} - d_{22} &= \sigma_{qm}^e \cdot n_m(Q_{O_2}) \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= \iint_{O_1} \Phi 1_{qm}(Q_{O_1}, M_{O_1}) a_m(M_{O_1}) dM_{O_1}; \\ d_{12} &= \iint_{O_2} [\Phi 1_{qm}(Q_{O_1}, M_{O_2}) - \Phi 2_{qm}(Q_{O_1}, M_{O_2})] \times \\ &\quad \times a_m(M_{O_2}) dO_{M_{O_2}}; \\ d_{21} &= \iint_{O_1} [\Phi 1_{qm}(Q_{O_2}, M_{O_1}) - \Phi 2_{qm}(Q_{O_2}, M_{O_1})] \times \\ &\quad \times a_m(M_{O_1}) dO_{M_{O_1}}; \\ d_{22} &= \iint_{O_2} [\Phi 1_{qm}(Q_{O_2}, M_{O_2}) - \Phi 2_{qm}(Q_{O_2}, M_{O_2})] \times \\ &\quad \times a_m(M_{O_2}) dO_{M_{O_2}} \end{aligned} \quad (6)$$

В выражении (2)  $O_1, O_2$  – поверхности, соответственно, выреза и неоднородности.

Следует заметить, что во всех приведённых выше уравнениях единственной константой, характеризующей упругие свойства материала, является коэффициент Пуассона. Следовательно, свойства массива и вставки в количественном отношении отличаются друг от друга лишь значениями своих коэффициентов Пуассона. Однако этот, странный на первый взгляд, факт вполне объясним. В теории упругости существуют два пути (направления) решения задач о напряжённо-деформированном состоянии тел. Первый путь это решение в перемещениях, когда разрешающая система 15 дифференциальных уравнений в частных производных для объёмной задачи сводится к системе 3-х дифференциальных уравнений Ляме также в частных производных относительно проекций вектора перемещений. Причём, в эти уравнения (для изотропного массива) входят две константы – модуль упругости и коэффициент Пуассона. Второй путь – решение в напряжениях. В этом случае разрешающая система для той же, объёмной, задачи сводится к системе 6-и дифференциальных уравнений Бельтрами – Митчелла в частных производных относительно компонент тензора напряжений. В этих уравнениях присутствует только одна константа – коэффициент Пуассона. Как уже было отмечено, интегральные уравнения второй внешней и второй внутренней задач были получены именно этим путём. В теории упругости выбор того или иного пути решения зада-

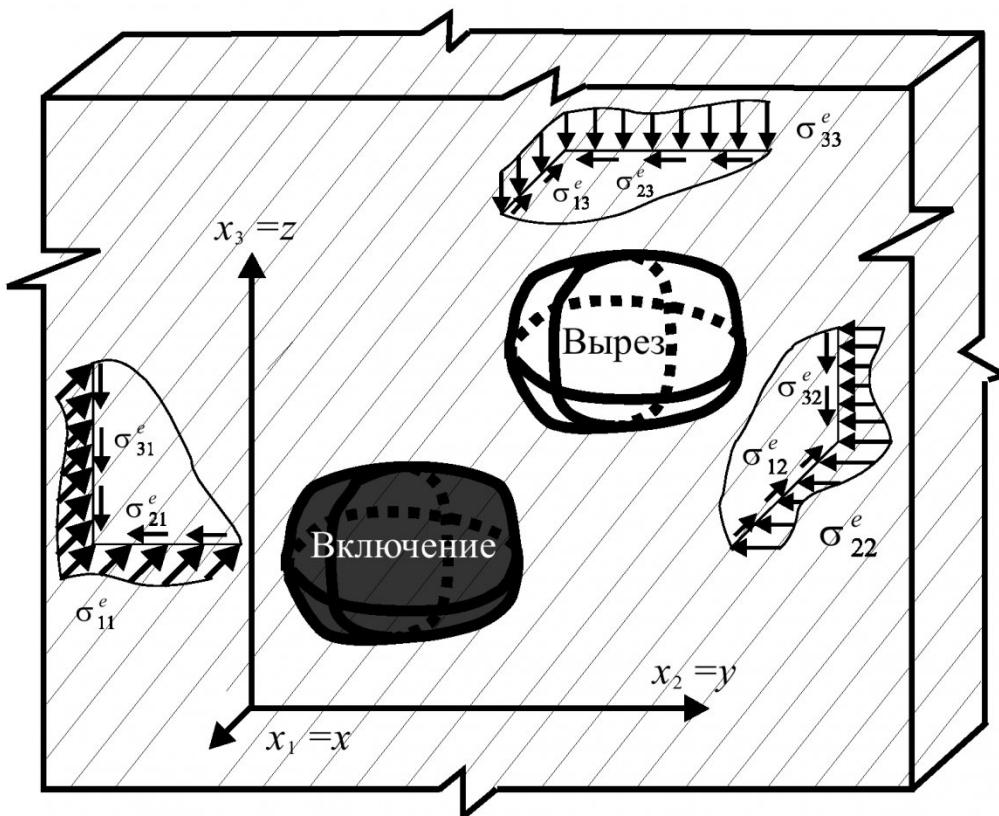
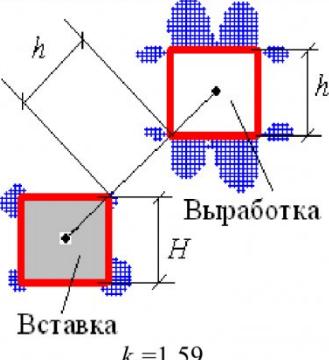
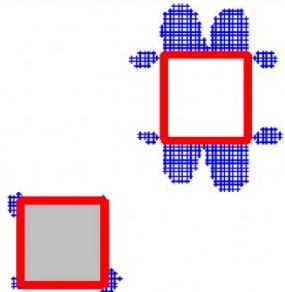
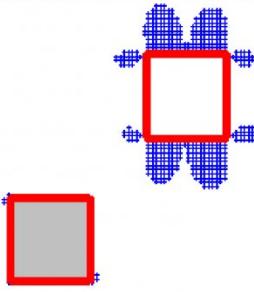
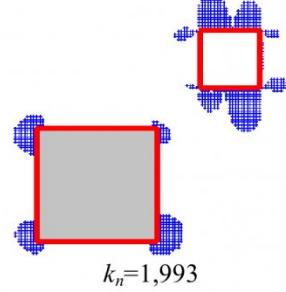
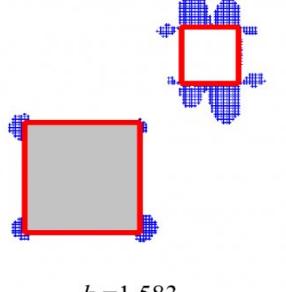
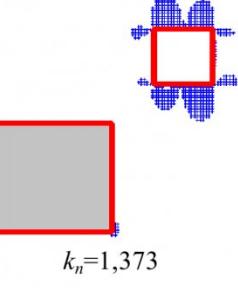
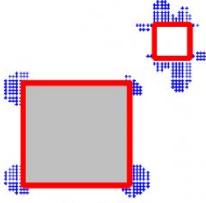
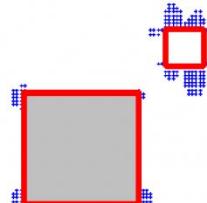
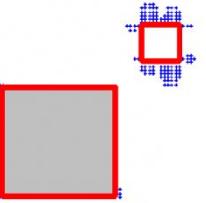
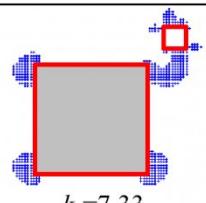
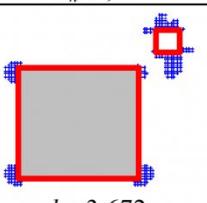
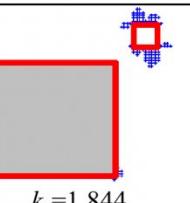
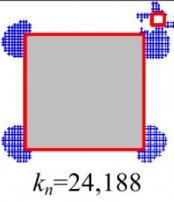
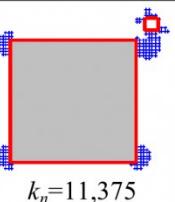
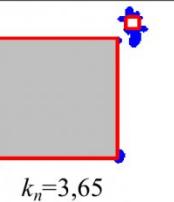


Рис. 1. Расчётная схема неоднородной задачи геомеханики

Таблица. ЗНС и коэффициенты нарушенности вмещающего массива с  $\nu_1=0,45$ 

Типоразмер вставки $H/h$	Коэффициент Пуассона $\nu_2$ материала вставки		
	0	0,1	0,2
1	 $k_n = 1,59$	 $k_n = 1,475$	 $k_n = 1,398$
2	 $k_n = 1,993$	 $k_n = 1,583$	 $k_n = 1,373$
3	 $k_n = 3,22$	 $k_n = 2,05$	 $k_n = 1,5$
5	 $k_n = 7,33$	 $k_n = 3,672$	 $k_n = 1,844$
10	 $k_n = 24,188$	 $k_n = 11,375$	 $k_n = 3,65$

чи определяется рядом факторов, например, граничными условиями. Все задачи геомеханики связаны с бесконечными массивами, поэтому наиболее эффективно для их решения использовать второй путь. Вследствие этого в задачах геомеханики предварительное определение коэффициент Пуассона в лабораторных и натуральных условиях приобретает особый, чрезвычайно важный статус (смысл).

В статье представлены результаты расчёта в

плоской постановке задачи о геомеханическом состоянии массива горных пород в окрестности протяжённой одиночной выработки квадратного поперечного сечения и вставки квадратной формы. Вставка расположена вблизи выработки таким образом, что линия, соединяющая центры выработки и вставки, наклонена к горизонту под углом 45°. Минимальное расстояние между вставкой и выработкой, как и её пролёт, составляет 2 единицы (первый фрагмент таблицы). Размер стороны

вставки принимает значения: 2, 4, 6, 10, 20 единиц, т.е. соотношение сторон вставки и выработки составляет, соответственно, 1, 2, 3, 5, 10 раз.

Коэффициент Пуассона массива и вставки варьировался в следующем интервале: 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,45, 0,495 единицы.

Физико-механические характеристики среды

приняты следующими. Коэффициент бокового давления  $\lambda=1$ . Массив пронизан регулярными горизонтальными поверхностями ослабления с углами  $\alpha=0^\circ$ ,  $\beta=0^\circ$ . Угол внутреннего трения по основной породе и по поверхностям ослабления равнялся  $20^\circ$ , а коэффициент сцепления принят

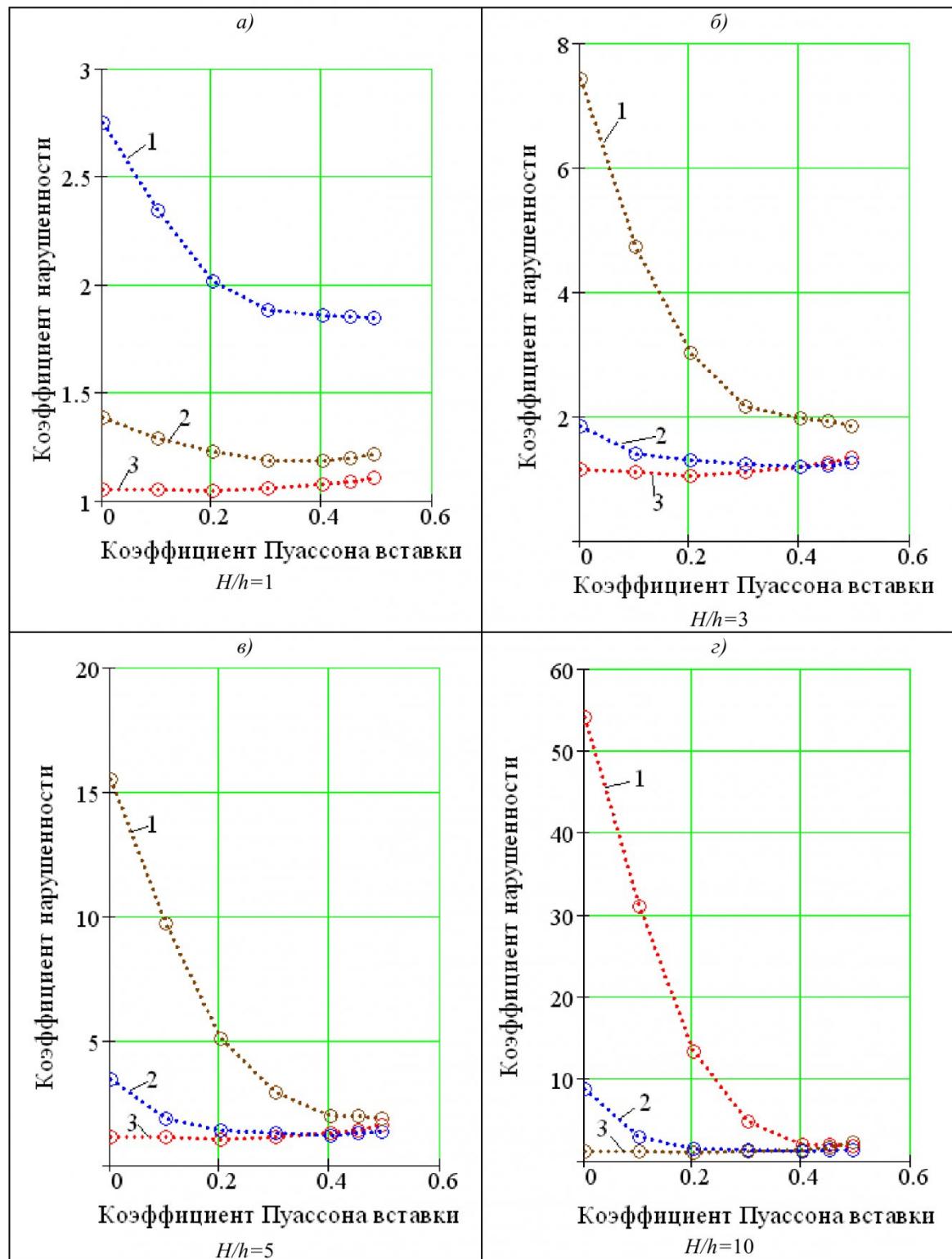


Рис. 2. Кривые зависимости коэффициента нарушенности от коэффициента Пуассона  $v_2$  для разных коэффициентов Пуассона для среды  $v_1$

равным нулю. Зоны нарушения сплошности строятся только для основного массива, полагая, что вставка монолитная, не имеет ослаблений, а потому не разрушается.

Некоторые результаты проведённого вычислительного эксперимента приведены в таблице и на фрагментах рис. 2, 3.

В таблице, в частности, представлены картины ЗНС в окрестности выработки и вставки, а

также значения коэффициента нарушенности, полученные для всех принятых типоразмеров вставки, одного значения коэффициента Пуассона для среды и трёх его значений для вставки. Видно, что при некоторых значениях  $v_2$  ЗНС охватывают не только окрестность выработки, но и окрестность вставки. Увеличение размеров вставки приводит и к увеличению коэффициента нарушенности массива, причём, оно не пропорционально линейному

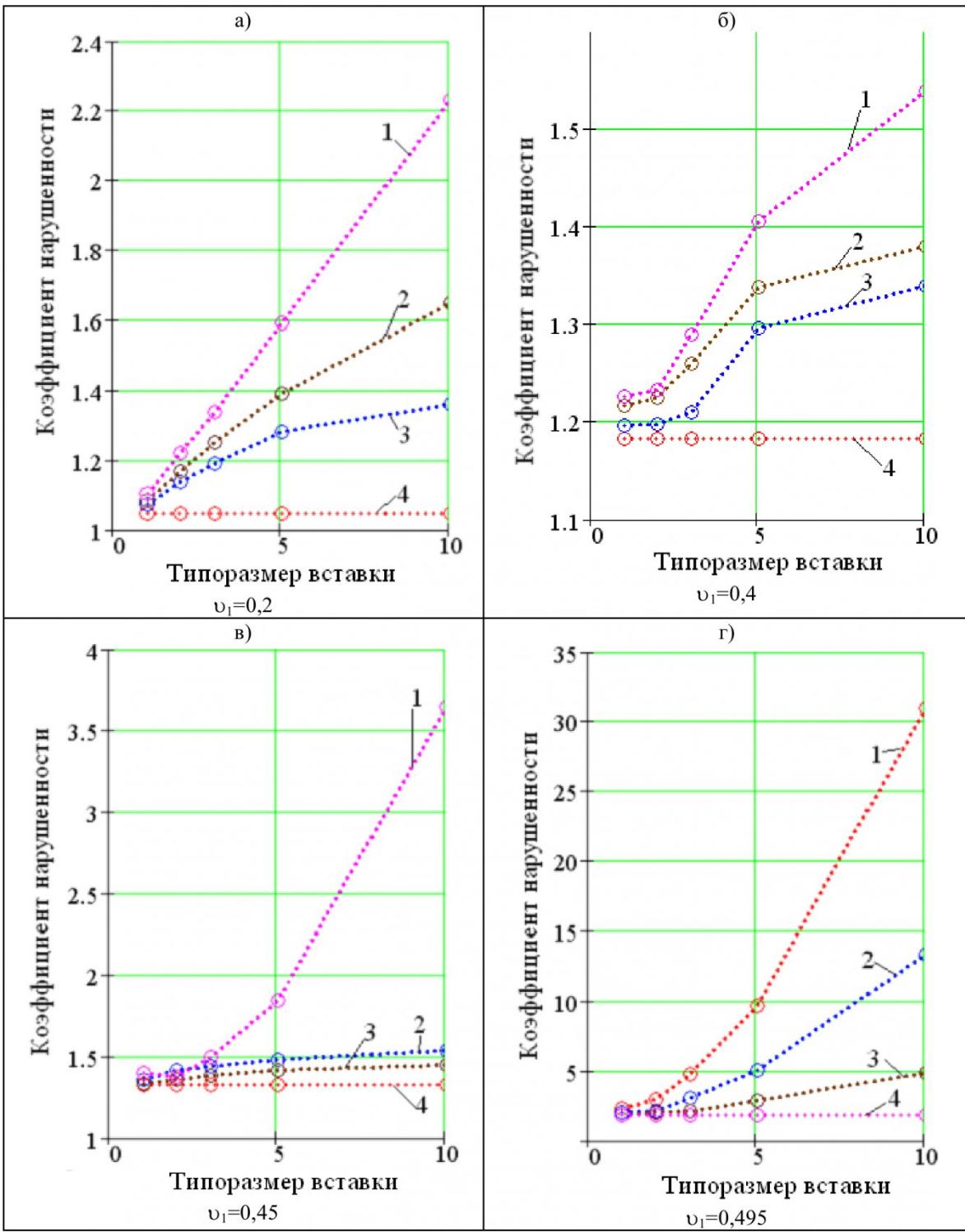


Рис. 3. Кривые коэффициента нарушенности при изменении типоразмера вставки при различных соотношениях коэффициентов Пуассона для вставки и среды

росту размера вставки.

На рис. 2 представлены четыре фрагмента (*a* - *ε*), соответствующих четырём принятым типоразмерам вставки. Фрагмент (*a*) относится к первому типоразмеру, а фрагменты (*б*), (*в*), (*г*), соответственно, к третьему, четвёртому и пятому типоразмерам вставки. На фрагментах приведено по три кривых коэффициента нарушенности. Каждая кривая построена при одном из трёх значений коэффициента Пуассона для среды. Так кривая 1 соответствует  $\nu_1=0,495$ , кривая 2 -  $\nu_1=0,4$ ; кривая 3 -  $\nu_1=0,2$ .

На рис. 3 даны четыре фрагмента (*a* - *ε*), полученные при четырёх значениях коэффициента Пуассона для среды. На фрагментах приведено по четыре кривых коэффициента нарушенности. Каждая кривая соответствует одному значению коэффициента  $\nu_2$ . Так на фрагменте (*a*) кривая 1 соответствует  $\nu_2=0,495$ , кривая 2 -  $\nu_2=0,45$ ; кривая 3 -  $\nu_2=0,4$ , кривая 4 -  $\nu_2=0,2$ . На фрагменте (*б*) кривая 1 построена при  $\nu_2=0,2$ , кривая 2 при  $\nu_2=0,495$ ; кривая 3 -  $\nu_2=0,45$ , кривая 4 -  $\nu_2=0,4$ . На фрагменте (*в*) кривая 1 построена при  $\nu_2=0,2$ , кривая 2 при  $\nu_2=0,495$ ; кривая 3 -  $\nu_2=0,4$ , кривая 4 -  $\nu_2=0,1$ . На фрагменте (*г*) кривая 1 получена при  $\nu_2=0,1$ , кривая 2 -  $\nu_2=0,2$ ; кривая 3 -  $\nu_2=0,3$ , кривая 4 -  $\nu_2=0,495$ .

Из таблицы следует:

1) наибольшее значение коэффициент нарушенности соответствует коэффициентам Пуассона для вмещающего массива горных пород  $\nu_1=0,45$  и вставки  $\nu_2=0$  при всех типоразмерах вставки. При этом наблюдаемые области нарушенности в угловых частях вставки с ростом её типоразмера увеличиваются и становятся сопоставимыми с размерами зон нарушения сплошности, расположеными непосредственно в окрестности выработки. При росте значений  $\nu_2$  (0,1, 0,2) значение коэффициента нарушенности уменьшается;

2) прямо пропорциональное увеличение размеров вставки нелинейно влияет на изменение коэффициента нарушенности, значения которого растут не прямо пропорционально.

Фрагменты рис. 2 демонстрируют следующее.

1. Кривые коэффициента нарушенности с изменением коэффициента Пуассона вставки носят плавный характер.

2. Кривая 1, построенная при значении  $\nu_1=0,495$ , близком к предельному значению коэффициента Пуассона для реально существующих материалов, значительно превышает остальные кривые и отличается большим градиентом изменения особенно на интервале изменения коэффициента Пуассона вставки  $\nu_2=0$  - 0,3.

3. Кривые 2, 3, построенные, при значительно отличающихся друг от друга значениях  $\nu_1=0,4$  и  $\nu_1=0,2$ , по сравнению с кривой 1, проходят достаточно близко друг к другу.

Из анализа графиков, приведённых на рис. 3 следует.

1. Кривые 1 на фрагментах (*a*, *в*, *г*), построенные при  $\nu_1/\nu_2$  ( $\nu_2/\nu_1$ )>2, с ростом размера вставки резко возрастают, при этом растёт и их градиент.

2. Кривые 2, 3 получены при соотношении коэффициентов Пуассона меньшем 2, с ростом размера вставки возрастают, но при этом их градиент убывает.

3. Кривые 4 на всех фрагментах постоянны, поскольку они построены при  $\nu_1=\nu_2$ . Этот случай соответствует однородной задаче. Однако разница в коэффициентах нарушенности для крайних случаев:  $\nu_1=\nu_2=0$  и  $\nu_1=\nu_2=0,495$  составляет более 80%.

#### Выводы

1. Приведённая система интегральных уравнений краевой задачи теории упругости определяет напряжённое состояние на границе раздела сред: массив - вставка, массив - выработка.

2. Метод граничных элементов, основанный на численном решении системы интегральных уравнений, позволяет построить поле напряжений неоднородного массива. Применение критерия прочности Мора - Кузнецова обеспечивает полный анализ геомеханического состояния неоднородного анизотропного по прочности массива горных пород в окрестности выработки произвольного очертания.

3. Области нарушения сплошности вмещающего массива тем больше, чем значительно отличаются друг от друга коэффициенты Пуассона для основного массива (среды) и включений (вставок). Наибольшая нарушенность массива достигается в случае, когда коэффициент Пуассона для включения  $\nu_2=0$ , а коэффициент Пуассона для массива  $\nu_1$  близок к 0,5.

4. С ростом отношения площади включения к площади сечения выработки, а также числа включений существенно возрастает и число граничных элементов. В этих случаях по объёму вычислений и требуемой оперативной памяти плоская задача геомеханики неоднородного массива для выработки и включений становится сопоставимой по объёму вычислений с трёхмерной задачей однородного массива с выработкой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Теория упругости. - М.: Наука. - 1970. -940 с.
2. Черданцев Н.В. Метод граничных интегральных уравнений в задачах механики подземных сооружений /Н.В. Черданцев, В.А. Шаламанов //Вестник КузГТУ, 2003, № 4.-С. 19–21.
3. Черданцев Н.В. Некоторые трёхмерные и плоские задачи геомеханики /Н.В Черданцев, В.Ю. Изаксон.– Кемерово, КузГТУ, 2004.–190 с.
4. Черданцев Н.В. Влияние опорного давления на прочность массива горных пород, содержащего цилиндрические вырезы / Н.В. Черданцев, В.Т. Преслер, В.Ю. Изаксон //ПМТФ.–2009.–№ 6.–С. 201–206.
5. Черданцев Н.В. Геомеханическое состояние анизотропного по прочности массива горных пород в окрестности сопрягающихся выработок /Н.В. Черданцев, В.Т. Преслер, В.Ю. Изаксон //ФТПРПИ.–2010.–№ 2.–С. 62–68.

□ Авторы статьи:

Черданцев

Николай Васильевич:  
докт.техн.наук, старший научный  
сотрудник лаборатории газодинами-  
ки и геомеханики угольных место-  
рождений Института угля СО РАН.  
E-mail: cherdantsev@icc.kemsc.ru

Преслер

Вильгельм Теобальдович:  
докт.техн.наук, ведущий научный  
сотрудник лаборатории газодинами-  
ки и геомеханики угольных место-  
рождений Института угля СО РАН.

**УДК 516.02**

**С.В. Черданцев**

## ДВИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО ТРУБАМ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Трубы переменного поперечного сечения, используемые для изменения скорости газового потока, широко применяются в паровых турбинах и являются важнейшей составной частью ракетных и сверхзвуковых реактивных авиационных двигателей, представляющих собой сопло Лаваля. Отметим, что точного расчета сопла Лаваля в настоящее время не существует, и поэтому его проектирование производится в каждом конкретном случае индивидуально.

В этой связи в данной статье предпринята попытка обсудить возможность использования в качестве сопла Лаваля труб переменного сечения, профилями которых являются меридианы незамкнутых в вершине безызгибных оболочек вращения [1].

Главные радиусы безызгибных оболочек получены в явном виде

$$R_1 = \frac{C_1 - C_2 x^2}{2C_1 C_2 x^2 (C_1 - C_2 x^2)}, \quad R_2 = \frac{C_1 - C_2 x^2}{2C_1 C_2 x^2}, \quad (1)$$

а уравнение меридиана выражается посредством формулы

$$f(x) = \pm \int_{-r}^x \frac{2C_1 C_2 x^3 dx}{\sqrt{(C_1 - C_2 x^2)^2 - 4C_1^2 C_2^2 x^6}}, \quad (2)$$

где положительный знак соответствует правой ветви меридиана, а отрицательный знак – левой. В формулах (1) и (2) абсцисса  $x$  отсчитывается от оси оболочки по перпендикуляру к ней. Из условия при

$$\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{2}: \quad R_2(\theta_1) \equiv R_2' = r, \quad R_1(\theta_1) \equiv R_1' =$$

определяются постоянные интегрирования

$$C_1 = \frac{R_1'}{r(r - 3R_1')}, \quad C_2 = \frac{R_1'}{r^3(r - R_1')}. \quad (3)$$

Численное интегрирование в (2) позволило [1] построить формы меридианов безызгибных оболочек (рис. 1,а).

Как видно из рисунка 1,а, безызгибные оболочки делятся на замкнутые в вершине, у которых  $0 < R_1'/R_2' \leq 1$  и незамкнутые, у которых  $R_1'/R_2' > 1$ . Сфера и цилиндр входят в найденный класс оболочек как частные случаи. Важнейшей характеристикой незамкнутых оболочек вращения является величина  $\Delta r/r$  (рис. 1,б).

Будем полагать идеальный газ баротропным, а его движение по каналу переменного сечения стационарным и безвихревым. Кроме этого мы считаем, что газовый поток не обменивается теплотой с окружающей средой (т.е. процесс адиабатический).

В связи со сказанным, уравнение Громеки – Лэмба [2]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} = \bar{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (4)$$

описывающее движение газа, допускает следующие упрощения.