

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Теория упругости. - М.: Наука. - 1970. -940 с.
2. Черданцев Н.В. Метод граничных интегральных уравнений в задачах механики подземных сооружений /Н.В. Черданцев, В.А. Шаламанов //Вестник КузГТУ, 2003, № 4.-С. 19–21.
3. Черданцев Н.В. Некоторые трёхмерные и плоские задачи геомеханики /Н.В Черданцев, В.Ю. Изаксон.– Кемерово, КузГТУ, 2004.–190 с.
4. Черданцев Н.В. Влияние опорного давления на прочность массива горных пород, содержащего цилиндрические вырезы / Н.В. Черданцев, В.Т. Преслер, В.Ю. Изаксон //ПМТФ.–2009.–№ 6.–С. 201–206.
5. Черданцев Н.В. Геомеханическое состояние анизотропного по прочности массива горных пород в окрестности сопрягающихся выработок /Н.В. Черданцев, В.Т. Преслер, В.Ю. Изаксон //ФТПРПИ.–2010.–№ 2.–С. 62–68.

□ Авторы статьи:

Черданцев

Николай Васильевич:  
докт.техн.наук, старший научный  
сотрудник лаборатории газодинами-  
ки и геомеханики угольных место-  
рождений Института угля СО РАН.  
E-mail: cherdantsev@icc.kemsc.ru

Преслер

Вильгельм Теобальдович:  
докт.техн.наук, ведущий научный  
сотрудник лаборатории газодинами-  
ки и геомеханики угольных место-  
рождений Института угля СО РАН.

**УДК 516.02**

**С.В. Черданцев**

## ДВИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО ТРУБАМ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Трубы переменного поперечного сечения, используемые для изменения скорости газового потока, широко применяются в паровых турбинах и являются важнейшей составной частью ракетных и сверхзвуковых реактивных авиационных двигателей, представляющих собой сопло Лаваля. Отметим, что точного расчета сопла Лаваля в настоящее время не существует, и поэтому его проектирование производится в каждом конкретном случае индивидуально.

В этой связи в данной статье предпринята попытка обсудить возможность использования в качестве сопла Лаваля труб переменного сечения, профилями которых являются меридианы незамкнутых в вершине безызгибных оболочек вращения [1].

Главные радиусы безызгибных оболочек получены в явном виде

$$R_1 = \frac{C_1 - C_2 x^2}{2C_1 C_2 x^2 (C_1 - C_2 x^2)}, \quad R_2 = \frac{C_1 - C_2 x^2}{2C_1 C_2 x^2}, \quad (1)$$

а уравнение меридиана выражается посредством формулы

$$f(x) = \pm \int_{-r}^x \frac{2C_1 C_2 x^3 dx}{\sqrt{(C_1 - C_2 x^2)^2 - 4C_1^2 C_2^2 x^6}}, \quad (2)$$

где положительный знак соответствует правой ветви меридиана, а отрицательный знак – левой. В формулах (1) и (2) абсцисса  $x$  отсчитывается от оси оболочки по перпендикуляру к ней. Из условия при

$$\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{2}: \quad R_2(\theta_1) \equiv R_2' = r, \quad R_1(\theta_1) \equiv R_1' =$$

определяются постоянные интегрирования

$$C_1 = \frac{R_1'}{r(r - 3R_1')}, \quad C_2 = \frac{R_1'}{r^3(r - R_1')}. \quad (3)$$

Численное интегрирование в (2) позволило [1] построить формы меридианов безызгибных оболочек (рис. 1,а).

Как видно из рисунка 1,а, безызгибные оболочки делятся на замкнутые в вершине, у которых  $0 < R_1'/R_2' \leq 1$  и незамкнутые, у которых  $R_1'/R_2' > 1$ . Сфера и цилиндр входят в найденный класс оболочек как частные случаи. Важнейшей характеристикой незамкнутых оболочек вращения является величина  $\Delta r/r$  (рис. 1,б).

Будем полагать идеальный газ баротропным, а его движение по каналу переменного сечения стационарным и безвихревым. Кроме этого мы считаем, что газовый поток не обменивается теплотой с окружающей средой (т.е. процесс адиабатический).

В связи со сказанным, уравнение Громеки – Лэмба [2]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} = \bar{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (4)$$

описывающее движение газа, допускает следующие упрощения.

Во-первых, массовые силы в идеальном газе, как правило, не учитываются  $\vec{f} = 0$ .

Во-вторых, ввиду стационарности газового потока его скорость  $\vec{v}$  и плотность  $\rho$  не зависят от времени, поэтому

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

В-третьих, поскольку движение газа безвихревое, то каждая индивидуальная частица газа перемещается только поступательно, поэтому вихрь скорости

$$\text{rot } \vec{v} = 0. \quad (6)$$

В-четвертых, предположение о баротропности газа позволяет нам ввести функцию давления  $P(p)$ , дифференциал которой

$$dP(p) = \frac{dp}{\rho}, \quad (7)$$

что приводит нас к равенству

$$\nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (8)$$

в котором  $\nabla$  является оператором Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

В силу сказанного, уравнение (4) преобразуется к виду

$$\nabla \left( \frac{v^2}{2} + P \right) = 0 \quad (9)$$

и, поскольку выражение в скобках не зависит от координат, то решением уравнения (9) является равенство

$$\frac{v^2}{2} + P = C, \quad (10)$$

называемое интегралом Бернуlli, в котором  $C$  – постоянная.

Зависимость между давлением  $p$  газа и его плотностью  $\rho$  в адиабатическом процессе выражается формулой [2,3]

$$p = D\rho^k, \quad (11)$$

в которой давление  $p$  называют адиабатой Пуассона, а коэффициент  $k = c_p/c_v$ , содержащий теплоемкости газа при постоянном давлении  $c_p$  и постоянном объеме  $c_v$ , называют показателем адиабаты [2,3].

Из формул (7) и (11) вытекает, что функция давления баротропного газа в адиабатическом процессе представима в следующем виде

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{Dk\rho^{k-1} d\rho}{\rho} = Dk \int \rho^{k-2} d\rho = Dk \frac{\rho^{k-1}}{k-1}$$

или после преобразования

$$P(p) = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho}. \quad (12)$$

В силу формулы (12) интеграл Бернуlli (10) приводится к виду

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = C. \quad (13)$$

Учитывая, что скорость звука  $a$  в газе определяется формулой [2]

$$a = \sqrt{k \cdot \frac{p}{\rho}}, \quad (14)$$

уравнение (13) представимо как

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = C. \quad (15)$$

Возьмем дифференциалы от обеих частей (13)

$$vdv + \frac{k}{k-1} \left( \frac{dp \cdot \rho - p \cdot d\rho}{\rho^2} \right) = 0,$$

откуда

$$vdv + \frac{dp}{\rho} \frac{k}{k-1} \left( \frac{dp}{d\rho} - \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (16)$$

В силу формулы (14) и соотношения [2]

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2,$$

уравнение (16) приобретает вид

$$\frac{vdv}{a^2} + \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (17)$$

Изменение плотности потока  $\rho\vec{v}$  вдоль линии тока можно представить в виде следующего соотношения

$$d(\rho v \cdot \vec{e}_l) = d(\rho v) \cdot \vec{e}_l + \rho v \cdot d(\vec{e}_l), \quad (18)$$

в котором  $\vec{e}_l$  – единичный вектор, касательный к линии тока. Так как

$$d(\vec{e}_l) = \kappa_2 \cdot \vec{e}_2 ds,$$

где  $\vec{e}_2$  – единичный вектор, перпендикулярный  $\vec{e}_l$ ,  $\kappa_2$  – кривизна линии тока, которой можно пренебречь ввиду ее малости, и поэтому равенство (18) упрощается

$$d(\rho v \cdot \vec{e}_l) = d(\rho v) \cdot \vec{e}_l$$

и, значит,

$$d(\rho v) \cdot \vec{e}_l = (\rho dv + vd\rho) \cdot \vec{e}_l.$$

Умножив скалярно обе части полученного равенства на вектор  $\vec{e}_l$  и разделив на  $\rho v$ , получим уравнение

$$\frac{d(\rho v)}{\rho v} = \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho},$$

складывая которое с уравнением (17), получим

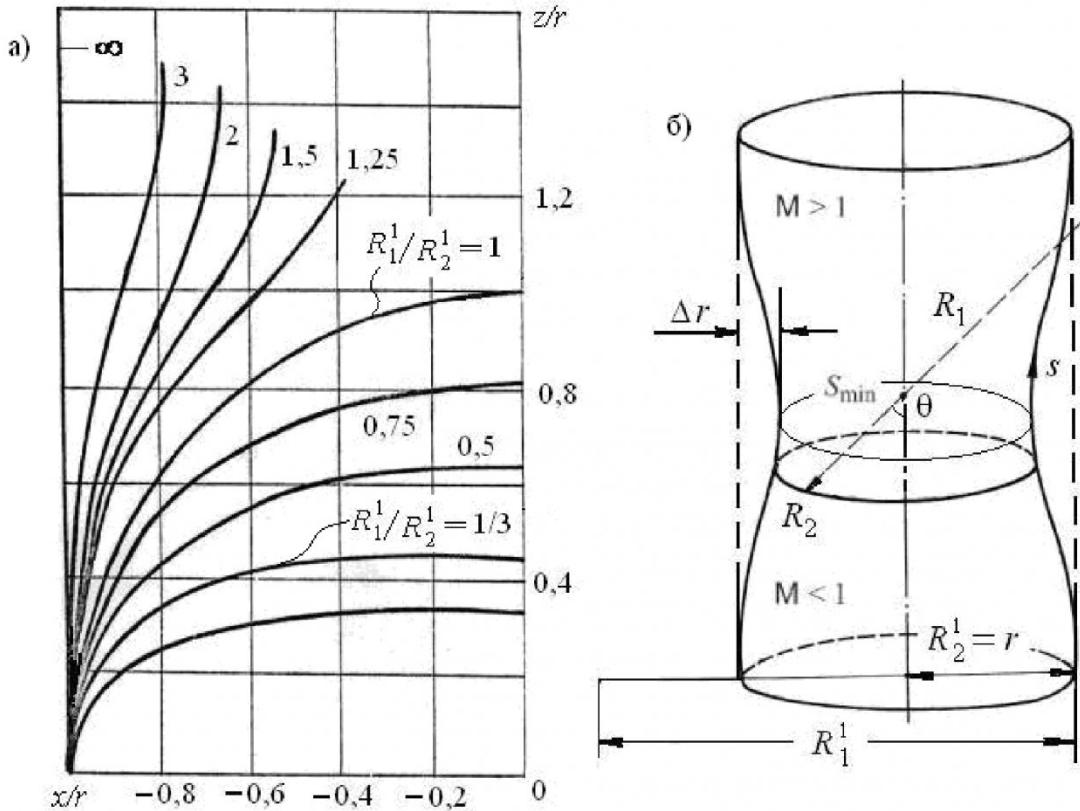


Рис. 1. Формы меридианов безызгибных оболочек вращения (а) и общий вид незамкнутой безызгибной оболочки (б)

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right),$$

откуда

$$d(\rho v) = \rho(1 - M^2)dv, \quad (19)$$

где  $M = v/a$  – число Маха.

Ввиду стационарности газового потока, уравнение неразрывности

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \cdot dV = 0$$

с учетом формулы Остроградского – Гаусса

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \cdot dV = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

приобретает вид

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (20)$$

Поскольку боковая поверхность канала не-проницаема, а газ течет только через торцевые сечения канала  $S_1$  и  $S_2$ , получаем равенство

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \rho_1 \vec{v}_1 \cdot (-\vec{n}_1) dS + \iint_{S_2} \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 dS,$$

с учетом которого, уравнение (20) приводится к виду

$$\iint_{S_1} \rho_1 \vec{v}_1 \cdot (-\vec{n}_1) dS + \iint_{S_2} \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = 0,$$

откуда вытекает равенство

показывающее, что при стационарном течении объем газа есть величина постоянная

$$\rho v S = \text{const}. \quad (21)$$

Из равенства (21) получаем соотношение

$$\rho v dS + S d(\rho v) = 0,$$

из которого следует

$$d(\rho v) = -\frac{dS}{S} \rho v. \quad (22)$$

Приравняем правые части равенств (19) и (22)

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{dS}{S}. \quad (23)$$

Поскольку по определению  $M = v/a$ , то

$$dM = \frac{dv \cdot a - da \cdot v}{a^2},$$

откуда

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{da}{a}. \quad (24)$$

Из уравнения (15) вытекает равенство

$$vdv + \frac{2}{k-1} ada = 0,$$

преобразуемое к виду

$$\frac{dv}{v} + \frac{2}{k-1} \frac{1}{M^2} \frac{da}{a} = 0,$$

откуда имеем

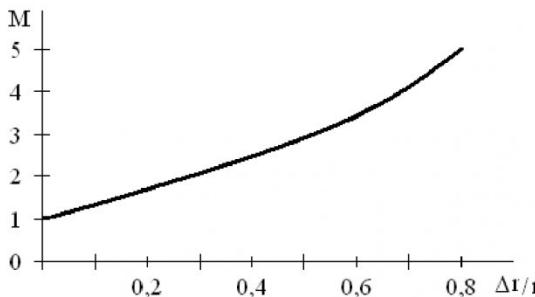


Рис. 3. Зависимость числа Маха от величины относительного сужения канала

$$M^2 \frac{k-1}{2} \frac{dv}{v} = -\frac{da}{a}. \quad (25)$$

Из равенства (24) вычтем (25)

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} \left( 1 + M^2 \frac{k-1}{2} \right)$$

и найдем производную  $dv/v$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} \cdot \frac{2}{2 + (k-1)M^2}.$$

В силу полученного равенства, дифференциальное уравнение (23) приводится к виду

$$\frac{dS}{S} = \frac{2(M^2 - 1)dM}{M[2 + (k-1)M^2]}, \quad (26)$$

переменные в котором разделены. Поэтому, интегрируя (26), находим его решение

$$\frac{S}{S_{min}} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2 + (k-1)M^2}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}. \quad (27)$$

В левой части формулы (27) находятся геометрические параметры канала переменного сечения, а в правой части – коэффициент  $k$  и число Маха, являющиеся характеристиками газового потока. Обозначим

$$\frac{S}{S_{min}} = y_1, \quad \frac{1}{M} \left[ \frac{2 + (k-1)M^2}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = y_2(M) \quad (28)$$

и вычислим значение  $y_1$  при  $\Delta r/r = 0,2324$ , что соответствует незамкнутой в вершине безызгибной оболочки вращения с соотношением главных радиусов в торцевом сечении  $R_1^I / R_2^I = 3$  (см. рис. 1,а). График функции  $y_2(M)$  построим при  $k = 1,4$  (рис. 2). Абсцисса точки пересечения графиков  $M = 2,01$  является решением уравнения (28).

Это значит, что труба переменного сечения с профилем безызгибной оболочки, относительное сужение которой  $\Delta r/r = 0,2324$  обеспечивает увеличение скорости газового потока до двойной скорости звука в газе.

Выполняя аналогичные рассуждения для труб переменного сечения с профилями безызгибных оболочек при других значениях  $\Delta r/r$ , построим график зависимости числа Маха от величины от-

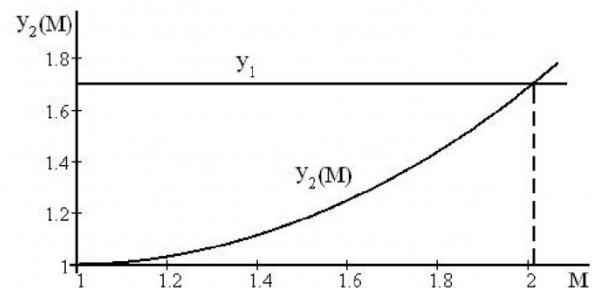


Рис. 2. К определению числа Маха газового потока на выходе из канала

носительного сужения (рис. 3), который показывает, что чем больше сужение  $\Delta r/r$ , тем выше скорость газового потока при выходе из трубы переменного сечения.

Таким образом, трубы переменного поперечного сечения с профилями незамкнутых в вершине безызгибных оболочек вращения, обеспечивают разгон газового потока до сверхзвуковой скорости и, следовательно, могут использоваться в качестве сопла Лаваля.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич, В.И. Тонкие оболочки вращения, деформирующиеся без изгиба под действием равномерного давления / В.И. Гуревич, В.И. Калинин // Докл. АН СССР.– 1981. – т. 256, № 5. – С. 1085 – 1088.
2. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа: – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
3. Леонович, М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. – М.: Физматгиз, 1983. – 416 с.

□Автор статьи :

Черданцев

Сергей Васильевич

– докт. техн. наук, проф. каф.  
математики КузГТУ

E-mail: [svh01@yandex.ru](mailto:svh01@yandex.ru)  
Тел. 8-3842-53-57-85