ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

В. М. Волков, Е. А. Волкова

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим в области

$$D(T) = \{x, t \mid x \in D, 0 < t \le T\}$$

для уравнения

$$u_t = \Delta u + q(u) + f(x,t) \qquad (1)$$

вторую краевую задачу

$$u\big|_{t=0} = \Phi(x), x \in \overline{D}, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in\Gamma} = \mu(x,t), 0 \le t \le T, \qquad (3)$$

где область D обладает следующим свойствам: D – звёздная относительно начала координат, т. е. $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $K_\varepsilon(O) \in D$. Здесь $K_\varepsilon(O)$ – шар радиуса ε с центром в начале координат, Γ – граница области D..

Пусть относительно решения этой задачи известна в начале координат функция

$$u(0,t) = \nu(t), 0 \le t \le T. \qquad (4)$$

Наша задача состоит в определении функции $q(u)$ по известной функции $\nu(t)$.

Прежде чем приступить к формулировке основного результата, докажем лемму, нужную нам в дальнейшем.

Лемма. Пусть $u(x,t)$ – классическое решение задачи (1)-(3). Если данные задачи ограничены и удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial f}{\partial \vec r} \le 0, (x,t) \in D(T), \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial \vec r} \le -\alpha_1, x \in \overline{D}, \qquad (6)$$

$$\mu(x,t) \le -\alpha_2, (x,t) \in \Gamma \times [0,T], \qquad (7)$$

где $\vec r$ – радиальное направление, а α_1 и α_2 - строго положительные постоянные, то для решения задачи (1) - (3) в области $D(T)$ справедлива следующая оценка

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \vec r} \le -\alpha_3 < 0\cdot$$

Доказательство. Обозначим $\frac{\partial u}{\partial \vec r} = \nu$. Тогда для $\nu(x,t)$ дифференцированием по $\vec r$ получим первую краевую задачу. Сделав замену $\nu = 1/\omega$, имеем следующую задачу для функции $\omega(x,t)$

$$\omega_t = \Delta\omega - 2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{3}\omega_{x_i}^2}{\omega} - q'(u)\cdot\omega - -\frac{\partial f(x,t)}{\partial \vec r}\cdot\omega^2, (x,t) \in D(T),$$

$$\omega\big|_{t=0} = \left[\frac{\partial \Phi(x)}{\partial \vec r}\right]^{-1}, \quad x \in \overline{D},$$

$$\omega\big|_{x\in\Gamma} = \frac{1}{\mu(x,t)}, \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T].$$

Из принципа максимума имеем оценку для $\omega(x,t)$ во всей области

$$\omega(x,t) \ge \sup_{\lambda > a_0} \min\left\{0,\ \min_{(x,t)\in D(T)}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\vec r}\right]^{-1} \times e^{\lambda(T-t)},\ \min_{(x,t)\in\Gamma\times[0,T]}\frac{e^{\lambda(T-t)}}{\mu(x,t)}, -\frac{1}{\lambda - a_0}\times \times \min_{(x,t)\in D(T)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial\vec r}\cdot\omega^2\cdot e^{\lambda(T-t)}\right\},$$

где $a_0 = max[-q'(u)]$.

Ввиду условий (5) - (7) мы можем утверждать, что $\omega(x,t)$ в области $D(T)$ оценивается снизу некоторой отрицательной константой, зависящей от a_0, α_1, α_2.

$$\omega(x,t) \ge -c.$$

Возвращаясь к функции $\nu(x,t)$ с учетом ее неположительности во всей области, получим

$$\nu(x,t) \le -1/c$$

то есть то, что и требовалось доказать.

Перейдём к формулировке и доказательству теоремы единственности обратной задачи.

Теорема. Если функция

$$\Phi(x) \in H^{3+\alpha}(\overline{D}),$$

$$\mu(x,t) \in H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Gamma \times [0,T]),$$

$$f(x,t)\in H^{1+\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D}(T)\right), \nu(t)\in C[0,T],$$

и удовлетворяют условиям (5)-(7), $\Gamma\in H^{2+\alpha}$, а также условиям согласования

$$\left.\frac{\partial\Phi(x)}{\partial\bar{r}}\right|_{x\in\Gamma}=\mu(x,0),$$

то решение обратной задачи единственно в классе функций $q(u)\in C^3[R_1,R_2]$, совпадающих между собой на отрезке $[R_1,\nu(0)]$. Здесь R_1,R_2 – крайние точки интервала решения задачи (1)-(3).

В частности из леммы получаем, что

$$R_2=\max_{0\le t\le T}\nu(t)\cdot$$

Доказательство. Предположим, что существуют два решения задачи (1) - (4):

$$\{q_1(u_1),u_1(x,t)\} \text{ и } \{q_2(u_2),u_2(x,t)\}.$$

Для разностей $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ и $\widetilde{q}(u_2)=q_1(u_2)-q_2(u_2)$ получим задачу

$$v_t=\Delta v+A(x,t)\cdot v+\widetilde{q}(u_2),(x,t)\in D(T), \quad (8)$$

$$v|_{t=0}=0, x\in\overline{D}, \quad (9)$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{x\in\Gamma}=0,(x,t)\in\Gamma\times[0,T], \quad (10)$$

$$v(0,t)=0, 0\le t\le T, \quad (11)$$

где

$$A(x,t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}q_1'\left(\frac{u_1-u_2}{2}\cdot s+\frac{u_1+u_2}{2}\right)ds.$$

Решение задачи (8)-(10) выписывается в следующем виде [2]

$$v(x,t)=\int_0^t d\tau\int_D G(x,\xi,t,\tau)\widetilde{q}(u_2)d\xi,$$

где функция Грина $G(x,\xi,t,\tau)$ представима в виде разности фундаментального решения однородного уравнения (8)

$$Z(x,\xi,t,\tau)=\frac{1}{8\pi^{3/2}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\xi_i)^2}{4(t-\tau)}}+$$

$$+\int_\tau^t d\lambda\int_{E_3}\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}(t-\lambda)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x-\eta|^2}{4(t-\lambda)}}Q(\eta,\xi,\lambda,\tau)d\eta,$$

полученного после продолжения $A(x,t)$ во всё пространство с сохранением нормы, и функции $g(x,\xi,t,\tau)$, определяемой в виде [2]

$$g(x,\xi,t,\tau)=\int_\tau^t Z(x,\theta,t,\lambda)\cdot\omega(\theta,\xi,\lambda,\tau)ds_\theta\cdot$$

Здесь функции $Q(\eta,\xi,\lambda,\tau)$ и $\omega(\theta,\xi,\lambda,\tau)$ определяются как решения уравнений Вольтера второго рода, и для них и их производных справедливы следующие оценки

$$\left|\frac{\partial^n Q(\eta,\xi,\lambda,\tau)}{\partial\xi^n}\right|\le\frac{c}{(\lambda-\tau)^{\frac{n+3}{2}}}e^{-\frac{|\eta-\xi|^2}{4(\lambda-\tau)}},$$

$$\left|\frac{\partial^n\omega(\theta,\xi,\lambda,\tau)}{\partial\xi^n}\right|\le\frac{c}{(\lambda-\tau)^{\frac{n+4}{2}}}e^{-\frac{|\theta-\xi|^2}{4(\lambda-\tau)}},$$

$n=0, 1,\ldots$

Используя условие (11) получим уравнение для определения $\widetilde{q}(u_2)$

$$\int_0^t d\tau\int_D G(0,\xi,t,\tau)\widetilde{q}(u_2)d\xi=0.$$

Перейдём под интегралом к сферическим координатам

$$\int_0^t d\tau\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\psi d\psi$$

$$\int_0^{R(\varphi,\psi)}G(0,r,\varphi,\psi,t,\tau)\widetilde{q}(u_2)r^2dr=0.$$

С учетом доказанной леммы, переходим от переменной r к переменной интегрирования $u_2=u_2(r,\varphi,\psi,\tau)$ и, используя условие $\widetilde{q}(u_2)=0$ при $u_2\in[R_1,\nu(0)]$, получаем

$$\int_0^t d\tau\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\psi d\psi$$

$$\int_{\nu(0)}^{\nu(\tau)}\begin{matrix}G(0,r,\varphi,\psi,t,\tau)\times\\ \times\dfrac{r^2(u_2,\varphi,\psi,\tau)}{u_{2r}}\end{matrix}\widetilde{q}(u_2)r^2dr=0. \quad (12)$$

Рассмотрим, как преобразуется выражение

$$\int_0^t\frac{r^2}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}d\tau.$$

После применения к нему оператора интегрирования и замены $t=(x-\tau)t_1+\tau$ получим

$$\int_0^x dt\int_0^t\frac{r^2}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\int_0^x d\tau\int_\tau^x\frac{r^2}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}dt=$$

$$= \int_0^x d\tau \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{x-\tau}\cdot t_1^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4(x-\tau)t_1}} dt_1 =$$

$$= \int_0^x 2rd\tau \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$$

Интегрируем уравнение (12) по переменной t в пределах от 0 до x. Тогда в силу только что полученной формулы, имеем

$$\int_0^x d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi sin\psi d\psi \int_{\nu(0)}^{\nu(\tau)} \frac{\tilde{q}(u_2)du_2}{u_{2r}}$$

$$\int_{\frac{r^2}{4(x-\tau)}}^\infty \frac{1}{4\pi^{3/2}} r \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt +$$

$$+ \int_0^x dt \int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi sin\psi d\psi$$

$$\int_{\nu(0)}^{\nu(\tau)} \left[\int_\tau^t d\lambda \int_{E_3} \frac{1}{8\pi^{3/2}(t-\lambda)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{|\eta|^2}{4(t-\lambda)}} \times \right.$$

$$\left. \times Q(\eta, r, \varphi, \psi, \lambda.\tau) d\eta - g(0, r, \varphi, \psi, t, \tau) \right] \times$$

$$\times \frac{r^2}{u_{2r}} \cdot \tilde{q}(u_2) du_2 = 0$$

Если вместо функции $\tilde{q}(u_2)$ ввести новую функцию $\mu(u_2)$ по формуле

$$\mu(u_2) = \int_{\nu(0)}^{u_2} d\alpha \int_{\nu(0)}^{\alpha} d\beta \int_{\nu(0)}^{\beta} \tilde{q}(t) dt$$

то после трёхкратного применения процедуры интегрирования по частям для $\mu(u_2)$ получим интегральное уравнение Вольтера второго рода, которое имеет единственное решение. Следовательно $\mu(u_2) = 0$, а значит и $\tilde{q}(u_2) = 0$.

Замечание. Так как в теореме мы доказываем единственность коэффициента на отрезке $[\nu(0), R_2]$, то R_2 должно быть больше $\nu(0)$, иначе данный отрезок вырождается в пустое множество. Здесь мы найдём одно из достаточных условий того, что $\max\limits_{0\le t\le T} \nu(t) > \nu(0)$.

Проинтегрируем уравнение (1) по области R_2 и по переменной t от нуля до τ

$$\int_0^\tau dt \int_D u_t dx = \int_0^\tau dt \int_D \Delta u dx +$$

$$+ \int_0^\tau dt \int_D q(u) dx + \int_0^\tau dt \int_D f(x,t) dx$$

и преобразуем его к следующему виду

$$\int_D u(x,\tau) dx = \int_D \Phi(x) dx + \int_0^\tau dt \int_\Gamma \mu(x,t) dx +$$

$$+ \int_0^\tau dt \int_D q(u) dx + \int_0^\tau dt \int_D f(x,t) dx$$

Тогда нужное нам условие в классе функций $q(u) \ge 0$ запишется следующим образом

$$\max_{0\le\tau\le T} \frac{\int_D \Phi(x) dx + \int_0^\tau dt \int_\Gamma \mu(x,t) dx + \int_0^\tau dt \int_D f(x,t) dx}{|D|} > \nu(0).$$

Здесь $|D|$ - объём области D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волков, В. М.* Обратная задача для квазилинейного уравнения параболического типа // Исследование корректности обратных задач и некоторых операторных уравнений. – Новосибирск, 1981. – С. 27-36.

2. *Ладыженская, О. А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В. А. Солонников, М. Н. Уральцев. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

3. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 735 с.

Авторы статьи:

Волков Владимир Матвеевич, канд.физ.-мат.наук., доцент, доц. каф. математики КузГТУ, e-mail: volkov@kemcity.ru.	Волкова Екатерина Анатольевна, канд.физ.-мат.наук., доцент, доц. каф. математики КузГТУ, тел. 8-3842-37-43-16