ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

О ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ

Обозначим через A множество всех частиц дисперсной системы, заполняющих некоторую трехмерную область , а через B множество частиц на поверхности дисперсной системы.

Мелкие частицы под действием силы тяжести обычно просеиваются в нижнюю часть дисперсной системы, делая ее неоднородной в том смысле, сто гранулометрические функции [1] множеств A и B различны.

Неоднородные дисперсные системы широко представлены на открытых разработках месторождений полезных ископаемых развалами взорванной горной массы. Ее гранулометрический анализ обычно проводится путем обработки результатов измерения частиц на поверхности развала после взрыва.

Однако, получаемая таким образом выборка в силу неоднородности дисперсной системы не является репрезентативной. Это приводит к существенному искажению в оценках содержания различных функций во взорванной горной массе.

Чтобы избежать подобного рода ошибок, необходимо производить корректировку расчетов с использованием взаимосвязи между гранулометрическими характеристиками частиц множеств A и B.

Пусть x – диаметр частицы (наибольший линейный размер), который как случайная величина распределен с плотностью $f(x)$ у частиц множества A и с плотностью $g(x)$ у частиц множества B.

Содержание крупных частиц в B превосходит их содержание в A. Поэтому существует такое значение диаметра x_0 , для которого выполняются условия: $f(x)< g(x)$ при $x>x_0$ и $f(x)> g(x)$ при $x<x_0$.

Этим условиям удовлетворяет соотношение $f(x)=(x_0/x)g(x)$.

Интегрируя это равенство в границах значений диаметра, получим $M_1=1/H$, $M_2=N_1/H$ и, следовательно, $N_1= M_2 /M_1$, где M_1, M_2 –математические ожидания (средние значения) диаметра и квадрата диаметра частиц из A; N_1 – математическое ожидание диаметра частиц из B; H – математическое ожидание величины, обратной диаметру частиц из B.

Обозначим через $F(x)$ и $G(x)$ интегральные функции распределения диаметра частиц из A и B.

Эти функции являются частным случаем гранулометрических функций, описывающих содержание различных фракций по числу частиц или, как говорят, дающих счетное распределение. Для конкретизации эти функций требуется знание вероятностного закона распределения диаметра x.

Для аппроксимации эмпирических распределений диаметра частиц дисперсной системы часто используют экспоненциальный закон с плотностью

$$f(x) = exp(-x/M_1) /M_1$$

и

$$g(x) = exp(-x/N_1) /N_1 .$$

Соответствующие функции распределения имеют вид

$$F(x) = 1 - exp(-x/M_1),$$

$$G(x)= 1 - exp(-x/N_1) .$$

Поскольку для экспоненциального распределения $M_2=2\cdot M_1^2$, то $N_1=2\cdot M_1$ и, следовательно $G(x)= 1 - exp(-x/M_1)$.

Найдем теперь содержание фракции с диаметрами частиц, меньшими M_1 , для множества частиц A и B

$$F(M_1) =1 -exp (-1) \approx 0.63,$$

$$G(M_1) =1 -exp (-0.5) \approx 0.39.$$

Таким образом, перенос на всю дисперсную систему результатов анализа измерений на ее поверхности дает ошибку в оценке содержания фракции $x <M_1$, равную 24%.

Эмпирические распределения диаметра частиц дисперсной системы нередко аппроксимируют т. н. треугольным распределением с плотностью $f(x) =1 - x$ и функций $F(x) =2x-x^2$, где за масштабную единицу принят наибольший из наблюдаемых диаметров частиц. Для этого закона $M_1 = 1/3$, $M_2 = 1/6$, $N_1= M_2 / M_1= 0.5$. Поскольку математическое ожидание диаметра частиц множества B находится в середине интервала

(0,1), то плотность распределения диаметра симметрична и имеет вид $g(x)=6x(1-x)$. Интегрируя ее, получим $G(x)=3x^2-2x^3$.

Вычислим содержание фракции $x<1/3$ во всей дисперсной системе $F(1/3)=5/9 \approx 0.56$ и на ее поверхности $G(1/3) \approx 0.26$. Как видим, разность составляет 30 %.

Наконец рассмотрим, когда диаметр частиц всей дисперсной системы и диаметр частиц на ее поверхности имеют равномерное распределение.

Для частиц множества A плотность распределения имеет вид $f(x)=1$, $x\in(0,1)$, где за масштабную единицу принят наибольший диаметр. Такое распределение имеет функцию $F(x)=x$, а также $M_1=0.5$, $M_2=1/3$ и, следовательно, $N_1=2/3$.

Поэтому для частиц множества B $x\in(0, 4/3)$ и $g(x)=3/4$, $G(x)=0.75x$. При этом содержание фракции $x<0.5$ в A равно 0,5, а в B – $3/8 = 0.375$. Как видим, разница составляет 12%.

В заключении отметим следующий любопытный факт: взаимосвязь между математическими ожиданиями диаметра шаров и диаметра их сечений случайной плоскостью, полученная методами интегральной геометрии, имеет аналогичную структуру [2], что свидетельствует в пользу развиваемого здесь вероятностного подхода к исследованию дисперсных систем с частицами произвольной формы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бирюков А.В.* Гранулометрические функции. / Вестник КузГТУ, 2010, № 6, с. 116.
2. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. – М: Наука, 1972. – 198 с.

Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт.техн.наук,
проф.каф. высшей математики
КузГТУ.
Тел. 8(3842)39-63-19