

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.688

Я.В. Славолюбова

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

1. Системы аналитических вычислений.

Системы компьютерной математики применяются в самых различных областях науки. Как правило, они включают процедуры для численных расчетов, символьных преобразований, средств визуализации, программирования и представления результатов. Такие системы совмещают в одной оболочке обширный набор инструментов для решения научных задач как прикладного, так и теоретического характера. Однако, в основном, они нацелены не на приближенные вычисления, а на решение задач, где требуется абсолютная точность или требуется провести сложные символьные вычисления для получения точных решений или доказательства теорем. Естественно, что для решения таких теоретических задач необходим этап математического моделирования, т.е. постановки задачи в том виде, в котором она возможна для компьютерной реализации [1].

В настоящее время повсеместно используются популярные системы компьютерной математики такие как Maple, Mathematica, MatLab, MathCAD. Они обладают универсальными математическими возможностями, постоянно совершенствуются, развивая аппарат и пополняя ресурсы, имеют возможность взаимной интеграции.

Maple – одна из наиболее развитых систем компьютерной математики, рассчитанная на широкий круг пользователей. До недавнего времени ее называли системой компьютерной алгебры. Это указывало на особую роль символьных вычислений и преобразований, которые способна осуществлять эта система. Но такое название служит сферу ее применения, так как она способна быстро и эффективно выполнять не только символьные, но и численные расчеты, причем сочетает это с превосходными средствами графической визуализации и подготовки электронных документов.

Наоборот, система MatLab известна мощными процедурами приближенных вычислений и векторизованных типов данных. В то же время она может осуществлять и символьные вычисления с использованием функций ядра Maple.

Пакет Maple идеален для формулировки, решения и исследования различных математических моделей. Его алгебраические средства существенно расширяют диапазон проблем, которые могут быть решены на качественном уровне.

Современная геометрия, также как и другие области математики, привлекает новейшие компьютерные технологии для решения своих задач. В настоящее время применение систем символьной математики не ограничивается численными расчетами. Эффективность математических систем проявляется также при доказательстве теорем. С использованием систем компьютерной математики получено множество новых математических результатов в областях, ранее далеких от использования компьютерных вычислений.

В данной работе рассматривается применение системы компьютерной математики Maple к решению задач теории контактных метрических структур. Исследуемыми объектами являются группы и алгебры Ли размерности 5.

Приведем математические понятия, необходимые для постановки задачи и моделирования задачи для решения с использованием Maple.

2. Математические методы. Остановимся на основных понятиях и фактах относительно контактных структур, левоинвариантных метрик на группах Ли и левоинвариантных контактных структур на группах Ли.

Напомним, что дифференцируемое $(2n+1)$ -мерное многообразие M класса C^∞ называется контактным, если на нем задана дифференциальная 1-форма η , такая что $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1} . Форма η называется контактной формой. Контактная форма определяет на многообразии M^{2n+1} распределение $D = \{X \in TM^{2n+1} \mid \eta(X) = 0\}$ размерности $2n$, которое называется контактным. Кроме того, контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле, обозначаемое ξ , которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$, для всех векторных полей X на M^{2n+1} . Векторное поле ξ определяет 1-мерное распределение, дополнительное к D . Векторное поле ξ называется полем Риба или характеристическим векторным полем контактной структуры.

Если M^{2n+1} – контактное многообразие с контактной формой η , то контактной метрической структурой называется четверка (η, ξ, φ, g) , где ξ – поле Риба, g – риманова метрика и φ – аффинор на M^{2n+1} , для которой характерны свойства:

$$1) \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi,$$

$$2) d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y),$$

$$3) g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

где I – тождественный эндоморфизм касательного расслоения.

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной. Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры η полностью определяется аффинором φ :

$$g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Поэтому мы ассоциированные метрики будем задавать аффинором φ . Отметим также, что аффинор φ действует как почти комплексная структура на контактном распределении D .

Контактная метрическая структура называется структурой Сасаки, если интегрируема почти комплексная структура J , определенная формулой

$$J(X, fd/dt) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)d/dt),$$

где $X \in M^{2n+1}$, $t \in \mathbf{R}$, f – функция класса C^∞ на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$, $J^2 = -I$.

На контактом метрическом многообразии определены два тензора $N^{(1)}, N^{(3)}$ [1]:

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi,$$

$$N^{(3)}(X, Y) = (L_\xi \varphi)X.$$

Как известно [2], $N^{(3)}$ обращается в нуль, если и только если характеристическое векторное поле ξ является киллинговым относительно метрики g . Тензор $N^{(1)}$ обращается в нуль, если и только если структуры сасакиева.

Пусть M^{2n+1} контактное метрическое многообразие, такое что η – контактная форма и (η, ξ, φ, g) – ассоциированная почти контактная метрическая структура. Если характеристическое векторное поле ξ порождает группу изометрий, то есть ξ – векторное поле Киллинга относительно g , то такую контактную метрическую структуру называют K -контактной структурой [1]. Контактная метрическая структура является K -контактной, если и только если $L_\xi \varphi = N^{(3)} = 0$ [2].

Если в качестве многообразия рассматривается группа Ли G , то естественно рассматривать левоинвариантные контактные структуры. В этом случае контактная форма η , векторное поле Риба ξ , аффинор φ и ассоциированная метрика g задаются своими значениями в единице, т.е. на алгебре Ли $L(G)$ группы Ли G .

3. Применение пакета Maple к исследованию контактных метрических структур на алгебре Ли.

Рассмотрим применение Maple для нахождения левоинвариантных K -контактных, сасакиевых и эйнштейновых структур на группах Ли.

Для примера рассмотрим алгебру Ли $L(G) = a_1^2 \times \mathbf{R} = \text{aff}(\mathbf{R}) \times \text{aff}(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}$, полученную методом контактного расширения на основе точной симплектической 4-мерной алгебры Ли $\text{aff}(\mathbf{R}) \times \text{aff}(\mathbf{R})$, имеющей в базисе e_1, e_2, e_3, e_4

коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_2$ и $[e_3, e_4] = e_4$. Симплектическая форма на $\text{aff}(\mathbf{R}) \times \text{aff}(\mathbf{R})$ имеет вид: $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$, $\omega = d\alpha$, $\alpha = -e^2 - e^4$. Рассмотрим контактную форму на $L(G)$ вида $\eta = -e^2 - e^4 + e^5$.

Математическая модель задачи построения ассоциированной контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) :

1) определяем контактную форму η , поле Риба ξ и форму $d\eta$ в символьном виде;

2) загружаем массив структурных констант на группах Ли G и $G \times \mathbf{R}$;

3) задаем массив для аффинора φ в общем виде, как символьную матрицу и находим условия на его элементы для выполнения свойств 1 и 3 контактной метрической структуры.

Перед использованием систем компьютерной математики для нахождения K -контактных, сасакиевых и эйнштейновых структур анализируем их характеристические свойства, приводя их к виду, удобному для вычислений. Другими словами, находим вычислительные формулы, соответствующие равенствам $N^{(1)}(X, Y) = 0$ и $N^{(3)}(X, Y) = 0$.

Напомним, что

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi,$$

где кручение Нейенхайса $[\varphi, \varphi]$ тензорного поля φ типа (1,1) является тензорным полем типа (1,2), заданным выражением

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2 [X, Y] + \\ + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi [\varphi X, Y] - \varphi [X, \varphi Y]$$

В левоинвариантном базисе $\{e_i\}$ имеем,

$$[\varphi, \varphi](e_i, e_j) = \varphi^2 [e_i, e_j] + [\varphi e_i, \varphi e_j] -$$

$$- \varphi [\varphi e_i, e_j] - \varphi [e_i, \varphi e_j] =$$

$$= \varphi^2 (C_{ij}^l e_l) + [\varphi_i^l e_l, \varphi_j^s e_s] -$$

$$- \varphi [e_i^l e_l, e_j] - \varphi [e_i, \varphi_j^l e_l] =$$

$$= C_{ij}^l (\varphi^2)_l^k e_k + C_{ls}^k \varphi_i^l \varphi_j^s e_k -$$

$$- \varphi_i^l \varphi(C_{lj}^s e_s) - \varphi_j^l \varphi(C_{il}^s e_s) =$$

$$= (\varphi_s^k \varphi_l^s C_{ij}^l + C_{ls}^k \varphi_i^l \varphi_j^s - \varphi_s^k C_{lj}^s \varphi_i^l - \varphi_s^k C_{il}^s \varphi_j^l) e_k$$

Распишем слагаемое $d\eta(X, Y)\xi$ на базисных векторах $\{e_i\}$, обозначив его предварительно

$$Q(X, Y) = d\eta(X, Y)\xi, \quad Q(e_i, e_j) = Q_{ij}^k e_k.$$

Поскольку $Q(X, Y) = d\eta(X, Y)\xi$ и $\xi = e_5$, то

$$Q(e_i, e_j) = Q_{ij}^5 e_5.$$

Учитывая, что $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$, имеем,

$$Q(e_i, e_j) = d\eta(e_i, e_j)e_5 = d\eta_{ij}e_5 = g_{is}\varphi_j^s e_5.$$

Поэтому $Q_{ij}^5 = g_{is}\varphi_j^s e_5$, а остальные компоненты – нулевые. Поскольку $N^{(1)}(e_i, e_j)$ является векторным полем, следовательно, $N^{(1)}(e_i, e_j)$ рас-

кладывается по базису, а именно $N^{(1)}(e_i, e_j) = N^{(1)}_{ij}^k e_k$. В базисе $\{e_i\}$ имеем окончательно,

$$N^{(1)}_{ij}^k = \varphi_s^k \varphi_l^s C_{ij}^l + C_{ls}^k \varphi_i^l \varphi_j^s - \varphi_s^k C_{lj}^s \varphi_i^l - \varphi_s^k C_{il}^s \varphi_j^l + Q_{ij}^k$$

где $Q_{ij}^k = d\eta_{ij} = g_{is}\varphi_j^s$ при $k=5$, и $Q_{ij}^k = 0$ ($k=1..4$).

Рассмотрим тензор $N^{(3)}$. Перепишем равенство $N^{(3)}(X, Y) = (L_\xi \varphi)X$ иначе:

$$\begin{aligned} L_\xi(\varphi(X)) &= (L_\xi \varphi)(X) + \varphi(L_\xi(X)); \\ [\xi, \varphi(X)] &= (L_\xi \varphi)(X) + \varphi([\xi, X]); \\ (L_\xi \varphi)(X) &= [\xi, \varphi(X)] - \varphi([\xi, X]). \end{aligned}$$

Поскольку $N^{(3)}(e_i)$ - векторное поле, следовательно $N^{(3)}(e_i)$ раскладывается по базису, а именно $N^{(3)}(e_i) = N^{(3)}_i^k e_k$. В базисе $\{e_i\}$ имеем

$$\begin{aligned} (L_\xi \varphi)e_i &= [e_5, \varphi(e_i)] - \varphi([e_5, e_i]) = \\ &= [e_5, \varphi_s^s e_s] - \varphi(C_{5i}^s e_s) = \varphi_i^s C_{5s}^k e_k - C_{5i}^s \varphi_s^k e_k = \\ &= (\varphi_i^s C_{5s}^k - C_{5i}^s \varphi_s^k)e_k \\ N^{(3)}_i^k e_k &= (\varphi_i^s C_{5s}^k - C_{5i}^s \varphi_s^k)e_k, \\ N^{(3)}_i^k &= \varphi_i^s C_{5s}^k - C_{5i}^s \varphi_s^k. \end{aligned}$$

Для решения вопроса о существовании ассоциированных структур Сасаки нужно выполнить следующие этапы.

1. Находим вид аффинора φ из условия: $d\eta(\varphi X, \varphi Y) = d\eta(X, Y)$, решая систему алгебраических уравнений, вытекающую из условия: $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$.

2. Вычисляем ассоциированную метрику g , определенную при фиксированных η и ξ аффинором φ по формуле: $g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)$.

3. Составляем программы и вычисляем основные геометрические характеристики построенной метрики: компоненты связности, тензор кривизны и его норму, секционные кривизны, тензор Риччи и его норму, оператор Риччи, главные кривизны Риччи, скалярную кривизну.

4. Составляем программу для решения вопроса об эйнштейновости и η -эйнштейновости.

5. Путем символьных вычислений ищем основные тензоры контактной метрической структуры.

6. Составляем программу для решения вопроса о K -контактности структуры.

7. Составляем программу для проверки различными критериями выполнения свойств K -контактности, сасакиевости.

Продемонстрируем эти этапы на примере решения данной задачи на прямом произведении $A_1^2 \times \mathbf{R}$. Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) задается:

- контактной формой $\eta = -e^2 - e^4 + e^5$;

- полем Риба $\xi = e_5$;

- аффинором

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & 0 \\ \varphi_{21} & -\varphi_{11} & \varphi_{41} & \varphi_{24} & 0 \\ -\varphi_{24} & \varphi_{14} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & 0 \\ \varphi_{41} & -\varphi_{13} & \varphi_{43} & -\varphi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где параметры φ_{ij} удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \varphi_{11}^2 + \varphi_{12}\varphi_{21} - \varphi_{13}\varphi_{24} + \varphi_{14}\varphi_{41} = -1, \\ \varphi_{11}\varphi_{13} + \varphi_{12}\varphi_{41} + \varphi_{13}\varphi_{33} + \varphi_{14}\varphi_{43} = 0, \\ \varphi_{11}\varphi_{14} + \varphi_{12}\varphi_{24} + \varphi_{13}\varphi_{34} - \varphi_{14}\varphi_{33} = 0, \\ \varphi_{11}\varphi_{24} - \varphi_{14}\varphi_{21} + \varphi_{24}\varphi_{33} - \varphi_{34}\varphi_{41} = 0, \\ \varphi_{11}\varphi_{41} - \varphi_{13}\varphi_{21} - \varphi_{24}\varphi_{43} - \varphi_{33}\varphi_{41} = 0, \\ \varphi_{33}^2 + \varphi_{34}\varphi_{43} - \varphi_{13}\varphi_{24} + \varphi_{14}\varphi_{41} = -1. \end{cases}$$

• ассоциированной метрикой g , относительно которой базис $E_1 = e_1, E_3 = e_3, E_2 = e_2 + e_5, E_4 = e_4 + e_5, E_5 = \xi = e_5$ ортонормированный;

• составляем программы на языке Maple для выполнения поставленных выше этапов (см. пример листинга ниже).

В результате компьютерного исследования структуры (η, ξ, φ, g) получается следующий теоретический результат.

Теорема. Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на группе $A_1^2 \times \mathbf{R}$ является K -контактной при всех значениях параметров φ_{ij} . Она является контактной метрической структурой Сасаки при следующем аффиноре:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_{11}^2 + 1}{\varphi_{12}} & -\varphi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{33} & \varphi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varphi_{33}^2 + 1}{\varphi_{34}} & -\varphi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая метрика g контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) имеет матрицу:

$$g = \begin{pmatrix} -\frac{\varphi_{11}^2 + 1}{\varphi_{12}} & -\varphi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varphi_{33}^2 + 1}{\varphi_{34}} & -\varphi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_{33} & -\varphi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадраты норм тензоров Римана и Риччи -

$$\|Riem\|^2 = -6\varphi_{12} - 6\varphi_{34} + 4\varphi_{34}^2 + 4\varphi_{12}^2 + 17/2,$$

$$\|Ric\|^2 = 2\varphi_{34}^2 + 2\varphi_{12}^2 - 2\varphi_{34} - 2\varphi_{12} + 2.$$

Секционные кривизны K_{ij} в направлении координатных площадок векторов базиса принимают

значения: $K_{12} = \varphi_{12} - 3/4$, $K_{13} = 0$, $K_{14} = 0$, $K_{15} = 1/4$, $K_{23} = 0$, $K_{24} = 0$, $K_{25} = 1/4$, $K_{34} = \varphi_{34} - 3/4$, $K_{35} = 1/4$, $K_{45} = 1/4$. Скалярная кривизна $S = 2(\varphi_{12} + \varphi_{34} - 1)$. Метрика Сасаки является эйнштейновой псевдоримановой при $\varphi_{11} = \varphi_{33} = 0$ и $\varphi_{12} = \varphi_{34} = 3/2$.

Доказательство теоремы получается прямыми вычислениями по приведенным выше формулам (см. также формулы в работе [4]) с использованием системы символьных вычислений Maple.

Аналогичным образом изучались другие левоинвариантные контактные метрические структуры на пятимерных алгебрах Ли.

Замечание. В классификационном списке работы [3] приведена пятимерная контактная алгебра Ли, являющаяся полупрямым произведением $A_1^2 \times_{\rho} \mathbf{R}$ (18-я алгебра Ли классификационного списка), заданная в базисе e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}[e_1, e_2] &= e_2, [e_3, e_4] = e_4, [e_1, e_5] = p e_5, \\ [e_3, e_5] &= q e_5.\end{aligned}$$

Данная алгебра Ли изоморфна рассмотренной выше алгебре Ли $A_1^2 \times \mathbf{R}$, установление чего проводилось на основе процедуры Maple.

Приведем один из аннотированных листингов основных для получения теоремы программ на языке Maple. В качестве примера рассмотрим контактную метрическую структуру $(\eta, \zeta, \varphi_0, g_0)$.

```
restart;
with(LinearAlgebra):with(linalg): # загрузка пакетов
                                   # расширения
g0:=array(sparse,1..5,1..5,[(1,1)=1, (2,2)=1, (3,3)=1,
                             (4,4)=1, (5,5)=1]); # исходная метрика
g0inv:= inverse(g0);
f0:=array(sparse,1..5,1..5,[(1,2)=1, (2,1)=-1,
                             (3,4)=1, (4,3)=-1]); # начальный аффинор
C:=array(sparse,1..5,1..5,1..5,[(1,2,2)=1, (1,2,5)=-1,
                                 (3,4,4)=1, (3,4,5)=1, (2,1,2)=-1, (2,1,5)=1, (4,3,4)=-1,
                                 (4,3,5)=1]); # структурные константы
deta:=array(sparse,1..5,1..5,[(1,2)=1, (2,1)=-1,
                               (3,4)=1, (4,3)=-1]); # дифференциал от η
deta11:=array(sparse,1..5, 1..5, 1..5); # вычисление
                                         # массива  $Q_{ij}^5 = g_{is}\varphi_j^s e_5$ 
```

```
for bb to 5 do
  for aa to bb-1 do
    for cc to 5 do
```

```
deta11[aa,bb,cc]:=-C[aa,bb,cc];
deta11[bb,aa,cc]:=C[aa,bb,cc];
od od od;
f0f0:=simplify(multiply(fp,fp)); # квадрат аффинора
ksi:=array(sparse,1..5,[5]=1); # поле Риба
Q:=array(sparse,1..5,1..5,1..5); # вспомогат массив.
for i to 5 do
  for j to 5 do
    Q[i,j,5]:=deta11[i,j,5]*ksi[5];
od od;
i:='i': j:='j':
N1:=array(1..5,1..5,1..5); # вычисл. тензора кручения
hi:=0:
for i to 5 do
  for j to 5 do
    for k to 5 do
      N1[i,j,k]:=sum(sum(f0[k,s1]*f0[s1,l]*C[i,j,l]+
                           C[l,s1,k]*f0[l,i]*f0[s1,j]- f0[k,s1]*C[l,j,s1]*f0[l,i] -
                           f0[k,s1]*C[i,l,s1]*f0[l,j],l=1..5), s1=1..5)+ Q[i,j,k];
      if N1[i,j,k]<>0 then
        hi:= hi+1 fi
od od od;
ненулевых:=hi;
i:='i': j:='j': k:='k':
for i to 5 do
  for j to 5 do
    for k to 5 do
      if N1[i,j,k]<>0 then
        print((i,j,k)=simplify(evalm(N1[i,j,k]))) fi
od od;
i:='i': j:='j': k:='k':
N3:=array(1..5,1..5); # вычисление тензора N3
YY:=0; i:='i': k:='k':
for i to 5 do
  for k to 5 do
    N3[k,i]:=sum(f0[s2,i]*C[5,s2,k]-
                  C[5,i,s2]*f0[k,s2],s2=1..5);
    if N3[k,i]<>0 then YY:=YY+1 fi
od od;
ненулевых:=YY;
i:='i': k:='k':
for i to 5 do
  for k to 5 do
    if N3[k,i]<>0 then
      print((k,i)=simplify(evalm(N3[k,i]))) fi
od od;
```

Данная программа позволяет вычислить тензоры $N^{(1)}$ и $N^{(3)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Дьяконов В. Maple 9 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 688 с.
- Blair, D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. - Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976. – 145 p.
- Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups// arXiv: math. DG/0403555, v2, 2004. – 17 p.
- Славолюбова Я.В. Левоинвариантные контактные метрические структуры на пятимерной группе Ли Гейзенберга // Вестник КемГУ. - Кемерово, 2006. № 4(28). - С.24-30.

□ Автор статьи:

Славолюбова

Ярославна Викторовна,

ст. преп. каф. высшей и прикладной
математики КемИ (филиала) РГТЭУ.

Email:jar1984@mail.ru