ГЕОМЕХАНИКА

УДК 622.272: 516.02

С.В. Черданцев

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ ЖИДКОСТИ В ЗУМПФАХ УГОЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ

Для предотвращения затопления забоев угольных разрезов грунтовыми и подземными водами используют понтоны с установленным на них водоотливным оборудованием, которые помещают непосредственно в зумпфах забоев. В зависимости от производительности водоотливного оборудования, они состоят из трех-пяти металлических труб-поплавков, герметически заваренных с торцов и расположенных параллельно друг другу, на которые настилают палубу из металлических пластин, обшитых досками, и боковые ограждения. Затем на палубу устанавливают насосное оборудование с электроприводом (рис. 1).

Расчет любого понтона на разрезе сводится лишь к обеспечению его плавучести. Однако качка понтонов на возмущенной (взволнованной) поверхности воды, вообще, не рассматривается. В то время как именно качка может привести к опрокидыванию понтона обладающего необходимым запасом плавучести, и, как следствие, к его затоплению.

Причиной качки любого плавучего средства является образование на поверхности жидкости гравитационных волн, возникающих вследствие того, что жидкость, выведенная из положения равновесия, будет совершать колебательные движения. Например, к гравитационным волнам относятся ветровые волны, приливные волны, возникающие из-за притяжения жидкости Солнцем и Луной. Однако главным образом гравитационные волны вызываются движением тел в жидкости. Поэтому нами предпринята попытка сформулировать задачу о гравитационных волнах на поверхности жидкости, находящейся в зумпфе угольного разреза, представляющего собой ограниченную область (т.е. область конечных размеров).

В качестве допущений полагаем, что:

1) силы вязкости в жидкости, вследствие малости толщины пограничного слоя по сравнению с размерами плавающего тела, не играют существенной роли [1, 2], и поэтому постановка задачи в данной работе выполняется в рамках модели идеальной баротропной жидкости;

2) движение жидкости в зумпфе представляет собой малое возмущение поверхности жидкости относительно состояния покоя;

3) граница области (т.е. размеры зумпфа), занимаемой жидкостью, в процессе качки понтона не меняется.

Тогда, вследствие теоремы Лагранжа, утверждающей, что движение идеальной жидкости, возникающее из состояния покоя, будет безвихре-

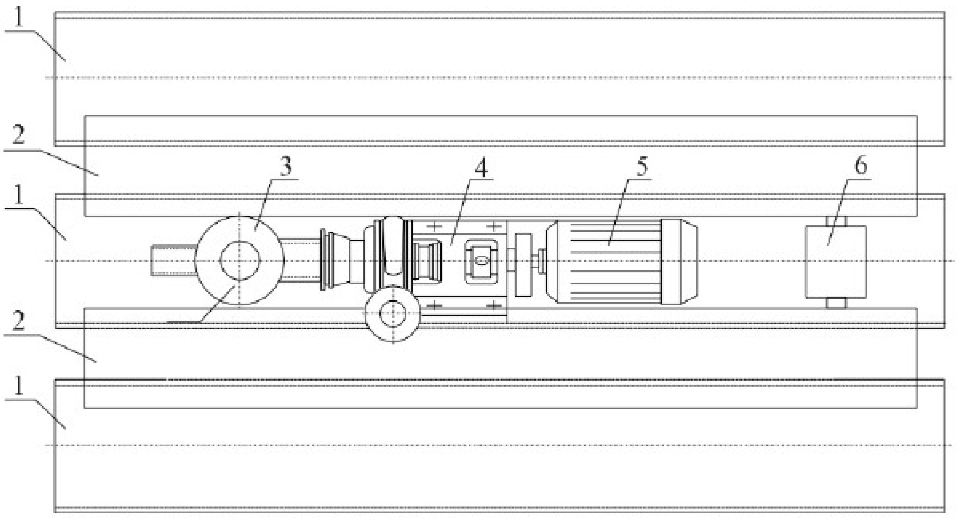

Рис. 1. Понтон с водоотливным оборудованием (вид сверху)
1 – металлические трубы-поплавки; 2 – палубный настил; 3 – бак-запасник воды; 4 – насос; 5 – электродвигатель; 6 – ящик для кабеля

вым [3]. Это значит, что каждая индивидуальная частица перемещается поступательно, но не вращается относительно некоторой оси, проходящей через саму частицу. Поэтому вихрь $\vec{\Omega}$ вектора скорости $\vec{v}$ равен

$$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{v}\,, \tag{1}$$

что позволяет выразить скорость безвихревого движения жидкости как

$$\vec{v} = \nabla\varphi, \tag{2}$$

где $\varphi = \varphi(x,y,z,t)$ является скалярной функцией, представляющей собой потенциал скоростей, а

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

является оператором Гамильтона.

Равенство (2) означает, что безвихревое движение жидкости является потенциальным.

Учитывая, что массовыми силами $\vec{f}$ являются силы тяжести частиц жидкости, мы можем ввести в рассмотрение потенциал U сил тяжести

$$\vec{f} = -\nabla U\,, \tag{3}$$

а на основании допущения о баротропности жидкости, введем функцию давления P, определяя ее как

$$P(p) = \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}. \tag{4}$$

В силу формул (1) – (4) уравнение движения жидкости в форме Громеки – Лэмба [3]

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times\vec{\Omega} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

приводится к виду

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + P\right) = 0\,, \tag{5}$$

решением которого является интеграл Коши – Лагранжа [3]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + P = \psi(t)\,, \tag{6}$$

где $\psi(t)$ – некоторая произвольная функция, которую можно положить равной нулю.

Добавим к (6) уравнение неразрывности [3]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\cdot\mathrm{div}\,\vec{v} = 0\,,$$

которое, в силу (2), принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\cdot\mathrm{div}(\nabla\varphi) = 0$$

и поскольку [5]

$$\mathrm{div}(\nabla\varphi) = \Delta\varphi,$$

то уравнение неразрывности будет выглядеть как

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \Delta\varphi = 0\,, \tag{7}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

является оператором Лапласа.

Уравнения (6) и (7) образуют систему двух нелинейных дифференциальных уравнений, которая допускает следующие упрощения.

1. Поскольку потенциал массовых сил жидкости равен $U = gz$, а движение жидкости представляет собой малое возмущение около состояния покоя, то мы пренебрегаем в уравнении (6) квадратом скорости движения жидкости как величиной более высокого порядка малости по сравнению с другими членами, что приводит к упрощению интеграла Коши – Лагранжа (6)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + gz + P = 0\,. \tag{8}$$

2. Так как силы тяжести частиц жидкости не зависят от времени, то, очевидно, и потенциал массовых сил U также не зависит от времени. Поэтому, продифференцировав по времени уравнение (8), имеем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

и поскольку

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^{p}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}\cdot dt\right) = \\ = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho}c^2\frac{d\rho}{dt},$$

где c – «местная» скорость звука в жидкости.

В силу полученной формулы, уравнение (9), приводится к виду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho}c^2\frac{d\rho}{dt} = 0$$

и сопоставляя его с (7), получаем волновое уравнение (основное уравнение гидроакустики)

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{10}$$

Однако во многих задачах гидроупругости [1, 2] и в задачах о качки плавающих тел [4] оказывается возможным считать жидкость несжимаемой, в которой скорость звука $c \to \infty$ и, следовательно, уравнение (10) вырождается в уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0\,, \tag{11}$$

в связи с чем, функция φ - гармоническая [5].

Таким образом, в рамках модели идеальной жидкости допущение о малости амплитуд ее возмущений поверхности в зумпфе угольного разреза позволило нам свести систему двух нелинейных уравнений (6), (7) к уравнению Лапласа (11), являющемуся уравнением эллиптического типа [5].

Представим уравнение взволнованной поверхности в виде

$$z = \delta(x, y, t).$$

Тогда кинематическое граничное условие, выражающее то обстоятельство, что свободная поверхность состоит из одних и тех же частиц жидкости, будет иметь вид

$$v_z = \frac{d\delta}{dt} \quad \text{при} \quad z = \delta. \qquad (12)$$

Учитывая, что

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{\partial\delta}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\delta}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

и полагая амплитуды волн малыми, мы можем пренебречь производными $\partial\delta/\partial x$ и $\partial\delta/\partial y$, характеризующими углы наклона взволнованной поверхности к горизонту. Кроме того, это же предположение позволяет считать все граничные условия на свободной поверхности выполняющимися не при $z = \delta$, а при $z = 0$. Тогда для кинематического условия (12) получим формулу

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\delta}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = 0. \qquad (13)$$

Если жидкость несжимаема, то функция давления легко находится из (4)

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{p - p_0}{\rho} \qquad (14)$$

и поскольку на поверхности жидкости $p = p_0$, то $P(p) = 0$ и (8) при $z = \delta$ приобретает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\cdot\delta = 0 \qquad (15)$$

и представляет условие на поверхности жидкости.

Из (15) для ординат профиля волны следует формула

$$\delta = -\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad (16)$$

описывающая взволнованную поверхность жидкости в зумпфе.

Продифференцировав (16) по времени, получим формулу

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} = -\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

в силу которой (13) приобретает вид

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \qquad (17)$$

Если область, занимаемая жидкостью неограниченно глубокая, то в качестве еще одного граничного условия принимается условие затухания волнового движения на большой глубине

$$\vec{v} = \nabla\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z \to -\infty, \qquad (18)$$

Если же, как в нашем случае, область (зумпф), занятая жидкостью ограничена, то вместо условия (18) мы должны использовать условие непротекания, заключающееся в том, что нормальная составляющая скорости на дне области $v_n = 0$.

Причем, если дно горизонтальное и плоское, то нормаль n совпадает с осью z. Следовательно, условие непротекания представляется в виде

$$v_z = 0 \quad \text{при} \quad z = -h,$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h, \qquad (19)$$

где h – глубина зумпфа.

Условия (17), (19) являются граничными условиями для искомой функции φ, которые совместно с уравнением Лапласа (11) образуют краевую задачу о гравитационных волнах малой амплитуды в ограниченных областях (зумпфах) занятых идеальной жидкостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк, Э. И. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью / Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков – Л. : Судостроение, 1976. – 200 с.
2. *Ростовцев, Д. М.* Гидроупругие колебания судовых конструкций. – Л. : Изд-во Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института, 1977. – 110 с.
3. *Серрин, Дж.* Математические основы классической механики жидкости. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 256 с.
4. *Ремез, Ю. В.* Качка корабля. – Л. : Судостроение, 1983. – 328 с.
5. *Кошляков, Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.

□ Автор статьи

Черданцев
Сергей Васильевич,
докт. техн. наук, проф. каф.
математики КузГТУ .
E–mail: svch01@yandex.ru