

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

АНИЗОТРОПНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Одной из основных геометрических характеристик случайного разбиения пространства на структурные блоки является скалярная функция векторного аргумента $f(\bar{e})$, значение которой равно среднему числу пересечений единичного отрезка с поверхностью структурных блоков в направлении вектора \bar{e} . Если $f(\bar{e})=const$, то разбиение естественно назвать изотропным. Таковым является, например, разбиение пространства пуассоновским множеством плоскостей.

Здесь же мы будем рассматривать важное для приложений анизотропное разбиение пространства n системами параллельных плоскостей на выпуклые многогранники. При этом значение функции $f(\bar{e})$ равно среднему числу пересечений единичного отрезка с гранями многогранников в направлении вектора \bar{e} .

Задача состоит в поиске направлений, по которым функция $f(\bar{e})$ достигает экстремальных значений, - осей анизотропии.

Каждой системе плоскостей поставим в соответствие вектор \bar{P}_i , $i = 1 \dots n$. При этом \bar{P}_i ортогонален плоскостям i -й системы и по модулю равен среднему числу пересечений единичного отрезка с плоскостями системы в направлении этого вектора. Тогда, как нетрудно видеть, значение $f(\bar{e})$ равно сумме абсолютных величин скалярных произведений $\bar{P}_i \cdot \bar{e}$.

Множество направлений, для которых эти произведения положительны, будучи пересечением полупространств, является многогранным конусом E . Для всех $\bar{e} \in E$ имеем $f(\bar{e}) = \bar{c} \cdot \bar{e}$, где \bar{c} есть сумма всех \bar{P}_i . Очевидно, что $f(\bar{c})$ является локальным максимумом для множества направлений E .

Вектор \bar{c} является одной из линейных комбинаций $\lambda_1 \bar{P}_1 + \dots + \lambda_n \bar{P}_n$, где коэффициенты независимо друг от друга принимают значения (+1) или (-1). Поскольку векторы \bar{P}_i найдены с точностью до знака, число линейных комбинаций, порождающих многогранные конусы, равно 2^{n-1} .

Таким образом, выбирая линейную комбинацию с наибольшим модулем, получаем направление для наибольшего значения функции $f(\bar{e})$, т. е. одну из осей анизотропии разбиения.

Автор статьи:

Бирюков

Альберт Васильевич

- докт.техн.наук, проф.каф.

высшей математики КузГТУ

Тел. 8-3842-39-63-19

Наименьшее значение функции $f(\bar{e})$ достигается в направлении одного из ребер многогранных конусов, т. е. в направлении одного из векторных произведений $\bar{P}_i \times \bar{P}_k$, а именно в направлении векторного произведения с наименьшим модулем.

В механической интерпретации задача поиска осей анизотропии состоит в поиске наибольшей и наименьшей равнодействующей системы сил, в которой каждая сила независимо от других может менять направление на противоположное.

Приведем пример расчета для $n=3$.

Пусть векторы \bar{P}_i имеют координаты $\bar{P}_1(1,2,1)$; $\bar{P}_2(2,-1,2)$; $\bar{P}_3(3,1,1)$.

Найдем координаты четырех линейных комбинаций $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3$, $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 - \bar{P}_3$, $\bar{P}_1 - \bar{P}_2 + \bar{P}_3$, $-\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3$. Они равны соответственно (6,2,4); (0,0,2); (2,4,0); (4,-2,0). Наибольший модуль, равный $\sqrt{56}$, имеет линейная комбинация $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3$, дающая направление одной из осей анизотропии.

Среди векторных произведений $\bar{P}_1 \times \bar{P}_2(5,0,-5)$, $\bar{P}_1 \times \bar{P}_3(1,2,-5)$, $\bar{P}_2 \times \bar{P}_3(-3,4,5)$ наименьший модуль, равный $\sqrt{30}$, имеет векторное произведение $\bar{P}_1 \times \bar{P}_3$, которое и определяет направление второй оси анизотропии.

По изложенной схеме проведены исследования трещиноватости породных массивов угольных месторождений Кузбасса, рассеченных тремя системами параллельных плоскостей – трещин. В полевых условиях для определения направления использовались угловые параметры – азимут и угол наклона к горизонтальной плоскости.

Одновременно проводилось круговое сейсмическое зондирование массивов. Установлено, что оси анизотропии трещиноватости совпадают с осями сейсмической анизотропии. При этом отношение экстремумов функции $f(\bar{e})$, в среднем равное 1,57, практически совпадает с отношением экстремальных значений скорости сейсмической волны, составляющим в среднем 1,62.