ТЕХНОЛОГИЯ МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 519.688

В.В.Шаяхметов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА КРИТИЧНОГО ПАРАМЕТРА ЭКСПЛУАТАЦИИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Задача определения оптимального периода обслуживания технических систем, как одного из критичных параметров процесса эксплуатации, сводится к выбору такой функции распределения $G(t)$, при которой выбранный показатель надежности принимает максимальное значение. Это следует из известной теоремы профилактики, доказывающей, что если дробно-линейный функционал вида

$$h(G)=\frac{\int_0^{\infty} A(t)dG(t)+a}{\int_0^{\infty} B(t)dG(t)+b} \qquad (1)$$

ограничен на множестве H функций распределения, функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{t\to 0} A(t)G(t)=\lim_{t\to\infty} A(t)[1-G(t)]=$$

$$=\lim_{t\to 0} B(t)G(t)=\lim_{t\to\infty} B(t)[1-G(t)]=0$$

а константы a и b ограничены по модулю, то выполняются условия

$$\sup_{G\in H^*} R(G)=\sup_{G\in H^*} h(G);$$

$$\inf_{G\in H} h(G)=\inf_{G\in H^*} h(G)$$

где H^* - множество вырожденных функций распределения

$$G(t)=\begin{cases}0, & при\ t<T;\\ 1, & при\ t\ge T,\end{cases}$$

то существуют локальные экстремумы функционала (1) достигаются на вырожденных функциях распределения.

Из этой теоремы следует, что техническое обслуживание необходимо проводить через неслучайные интервалы времени, если аналитическое выражение для выбранного показателя надежности представляет собой функционал указанного типа. Искомый детерминированный период технического обслуживания T определяется посредством дифференцирования выражения для выбранного показателя надежности по T с последующим приравниванием производной нулю и решением полученного уравнения. При плановых профилактиках для определения оптимального периода ТО T^* необходимо решить уравнение вида [2]

$$\frac{t_{TO}}{t_B-t_{TO}}=-F(T)+\lambda(T)\int_0^T P(t)dt. \qquad (2)$$

Исследование корней уравнения (2) позволяет сделать вывод о том, при каких значениях t_{TO} и t_B и при какой зависимости λ от T целесообразно проводить техническое обслуживание.

В процессе эксплуатации технической системы или подсистемы возможно проведение двух видов работ, восстанавливающих ее работоспособность: техническое обслуживание, в основу которого положено проведение плановых предупредительных профилактик, и аварийных ремонтов. Аварийный ремонт проводится сразу после обнаружения отказа. В начальный момент времени система работоспособна и планируется проведение технического обслуживания через случайное время T с ФР $G(t)=P\{t>T\}$. Если до назначенного момента времени система не отказала, то начинается проведение технического обслуживания, длительность которого – случайная величина t_{TO} с ФР $\Phi_{TO}(t)=1-exp(-\theta\cdot t)$.

Процесс эксплуатации можно описать полумарковским процессом, граф состояний и переходов которого изображен на рис. 1,

где e_0 - состояние, в котором техническая система работоспособна;

e_1 - состояние, в котором проводится техническое обслуживание системы;

e_2 - состояние, в котором производится аварийный ремонт;

e_3 - состояние, в котором система кратковременно выводится из эксплуатации;

e_4 - состояние, в котором система используется по назначению;

e_5 - состояние, в котором фиксируется отказ системы вследствие естественного отказа;

e_6 - состояние, в которые система переходит

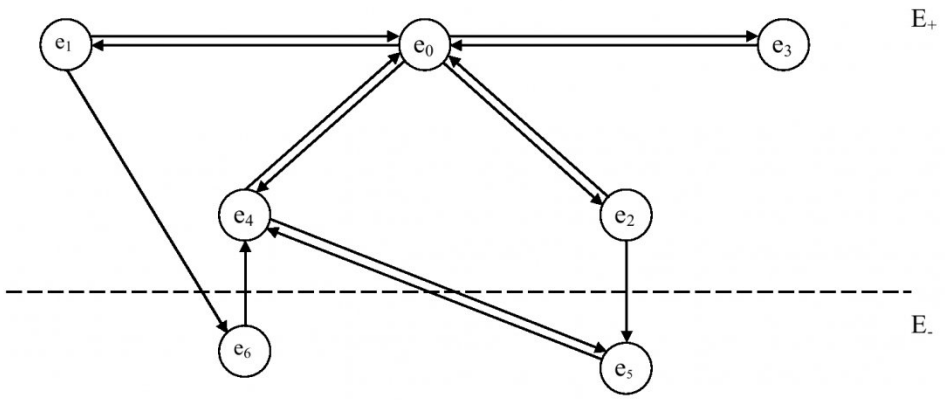

Рис.1 Упрощенный граф состояний и переходов ПМП, описывающего функционирование технической системы

при экстренном переводе из состояния e_3;

E_+ и E_- - области работоспособных и неработоспособных состояний системы.

Для упрощения расчетов примем следующие допущения: длительность ожидания использования по назначению значительно превышает длительность кратковременного вывода из эксплуатации, то есть вероятность начала использования по назначению при выводе из эксплуатации ничтожно мала и ею можно пренебречь; перевод системы из состояния технического обслуживания в готовность осуществляется мгновенно.

С учетом графа (рис.1) выражение для коэффициента готовности в общем виде примет вид:

$$K_\Gamma(z)=\left[\int_0^T \overline{F}_0(t)\overline{F}_3(t)\overline{F}_M(t)dt + M_{TO}\overline{F}_0(T)\overline{F}_3(T)\overline{F}_M(T)+M_pA+M_B\int_0^T \overline{F}_3(t)\overline{F}_M(t)d\overline{F}_0(t)+M_M\int_0^T \overline{F}_0(t)\overline{F}_3(t)d\overline{F}_M(t)\right]/$$
$$/\left[\int_0^T \overline{F}_0(t)\overline{F}_3(t)\overline{F}_M(t)dt + \bar{t}_{TO}\overline{F}_0(T)\overline{F}_3(T)\overline{F}_M(T)+\bar{t}_{B1}\int_0^T \overline{F}_3(t)\overline{F}_M(t)d\overline{F}_0(t)+\bar{t}_{B2}\int_0^T \overline{\Phi}_3(t)d\overline{F}_0(t)+M_M\int_0^T \overline{F}_0(t)\overline{F}_3(t)d\overline{F}_M(t)+M_pA\right], \quad (3)$$

где

$$A=\left[\overline{F}_0(T)\overline{F}_3(T)\overline{F}_M(T)+\int_0^T \overline{F}_0(t)\overline{F}_M(t)dF_3(t)+\int_0^\infty \overline{\Phi}_{TO}(t)dF_3(t)+\int_0^T \overline{F}_3(t)\overline{F}_M(t)dF_3(t)\times\int_0^\infty \overline{F}_B(t)dF_3(t)\right]/$$
$$/\left[1-\int_0^\infty \overline{\Phi}_3(t)dF_0(t)\right];$$

$$M_{TO}=\int_0^\infty \overline{\Phi}_{TO}(t)\overline{F}_3(t)dt;$$

$$M_B=\int_0^\infty \overline{F}_B(t)\overline{F}_3(t)dt;$$

$$M_M=\int_0^\infty \overline{\Phi}_M(t)\overline{F}_3(t)dt;$$

$$M_p=\int_0^\infty \overline{\Phi}_3(t)\overline{F}_0(t)dt;$$

$$\bar{t}_{TO}=\int_0^\infty \overline{\Phi}_{TO}(t)\overline{F}_3(t)dt+\int_0^\infty \overline{\Phi}_{TO}(t)\overline{F}_3(t)dt\times\int_0^\infty A_{\Pi\Gamma}(t)dt;$$

$$\bar{t}_{B1}=\int_0^\infty \overline{F}_B(t)\overline{F}_3(t)dt+\int_0^\infty\int_0^\infty \overline{F}_B(t)dt\times\int_0^\infty \overline{F}_B(t)dF_3(t);$$

$$\bar{t}_{B2}=A\int_0^\infty \overline{F}_B(t)dt;$$

$$\overline{F}_3(t)=1-F_3(t);\ \overline{F}_0(t)=1-F_0(t);$$
$$\overline{F}_M(t)=1-F_M(t);\ \overline{\Phi}_3(t)=1-\Phi_3(t);$$
$$\overline{\Phi}_{TO}(t)=1-\Phi_{TO}(t).$$

Интегрируя по частям, легко показать, что выражение (3) является дробно-линейным функционалом типа (1).

С учетом (2) и дифференцируя функцию (3) по T и приравнивая производную нулю, получаем уравнение для определения оптимального периода проведения технического обслуживания

$$\frac{\bar{t}_{TO}-M_{TO}}{(t_B-M_B)-(\bar{t}_{TO}-M_{TO})}=-\overline{F}_0(T)+$$
$$+\lambda(T)\left\{\int_0^T\overline{F}_0(t)\overline{F}_3(t)\overline{F}_M(t)dt+\right.$$
$$+\left[\int_0^T\overline{F}_3(t)\overline{F}_M(t)dF_0(t)\times\right.$$
$$\times(M_{TO}\bar{t}_{B1}-M_B\bar{t}_{TO})-(\bar{t}_{TO}-M_{TO})\times$$
$$\times\left(M_M\int_0^T\overline{F}_0(t)\overline{F}_3(t)dF_M(t)+\right.$$
$$\left.\left.\left.+A\int_0^\infty F_0(t)\Phi_3(t)dt\right)\right]/\right.$$
$$\left./\left[(\bar{t}_B-M_B)+(\bar{t}_{TO}-M_{TO})\right]\right\}+ \quad (4)$$
$$+\left\{\left[\overline{F}_0(T)\overline{F}_3(T)\overline{F}_M(T)\times\right.\right.$$
$$\times(M_B\bar{t}_{TO}-M_{TO}\bar{t}_B)-(\bar{t}_B-M_B)\times$$
$$\left.\left.\times\left(M_M\int_0^T\overline{F}_0(t)\overline{F}_3(t)dF_M(t)+AM_p\right)\right]\times\right.$$
$$\times\frac{d}{dT}\left[\int_0^T\overline{F}_3(t)\overline{F}_M(t)dF_0(t)\right]+$$
$$+M_p\left[\overline{F}_0(T)\overline{F}_3(T)\overline{F}_M(T)(\bar{t}_{TO}-M_{TO})+\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^T\overline{F}_3(t)\overline{F}_M(t)dF_0(t)(\bar{t}_B-M_B)\right]\frac{dA}{dT}\right\}/$$
$$/\left\{\begin{matrix}\overline{F}_0(T)\overline{F}_3(T)\overline{F}_M(T)\times\\ \times\left[(\bar{t}_B-M_B)-(\bar{t}_{TO}-M_{TO})\right]\end{matrix}\right\}+$$
$$+\left[\begin{matrix}\int_0^T\overline{F}_0(t)\overline{F}_3(t)dF_M(t)+\\ +\int_0^T\overline{F}_0(t)\overline{F}_M(t)dF_3(t)\end{matrix}\right](\bar{t}_B-M_B)/$$
$$/\left[(\bar{t}_B-M_B)-(\bar{t}_{TO}-M_{TO})\right],$$

где

$$\frac{dA}{dt}=\left[\overline{F}_0(T)\overline{F}_3(T)\int_0^\infty\overline{F}_{TO}(t)d\overline{F}_3(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{d}{dT}\left[\int_0^T\overline{F}_3(t)\overline{F}_M(T)dF_0(t)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^\infty\overline{F}_B(t)dF_B(t)+\right.$$
$$\frac{d}{dT}\left[\int_0^T\overline{F}_0(t)\overline{F}_M(t)dF_3(t)\right]/\int_0^\infty\overline{F}_0(t)d\Phi_3(t);$$
$$\frac{dA}{dT}=\left\{+\frac{d}{dT}\left[\int_0^T\overline{F}_0(t)\overline{F}_M(t)dF_3(t)\right]\right\}/$$
$$+\frac{d}{dT}\left[\int_0^T\overline{F}_0(t)\overline{F}_M(t)dF_3(t)\right]/$$
$$\lambda=\frac{Q(T)}{\overline{F}_0(T)\overline{F}_M(t)\overline{F}_3(T)};$$
$$Q(T)=\overline{F}_3(T)\overline{F}_M(t)\frac{dF_0(t)}{dT}+\overline{F}_0(T)\times$$
$$\times\overline{F}_M(t)\frac{dF_3(t)}{dT}+\overline{F}_0(T)\overline{F}_M(t)\frac{dF_M(t)}{dT}$$

Уравнение (4) является необходимым условием существования экстремума функции $K_\Gamma(Z)$. Если влияние резерва времени на показатели надежности не учитывать, то M_{TO} и M_B становятся равными нулю, а выражение (4) преобразуется к виду (2).

Проведем исследование существования конечных корней уравнения (4). Обозначим через $q(T)$ правую часть уравнения (4).

При T=0 $q(T)$=0, следовательно

$$\frac{\bar{t}_{TO}-M_{TO}}{(\bar{t}_B-M_B)-(\bar{t}_{TO}-M_{TO})}\geq q(0),$$

то есть производная функции (3) положительна. Если

$$\frac{\bar{t}_{TO}-M_{TO}}{(t_B-M_B)-(\bar{t}_{TO}-M_{TO})}<\lim_{T\to\infty}q(T); \quad (5)$$

то уравнение (4) будет иметь хотя бы один корень, а функция (3) – абсолютный максимум в конечной точке. Условие (5) есть достаточное условие существования оптимального периода проведения технического обслуживания. Если к тому же добавить условие монотонности $q'(T)>0$, то абсолютный максимум $K_\Gamma(Z)$ достигается при наименьшем корне уравнения (3). Для случая $\lim_{T\to\infty}q(T)<\infty$ необходимо проверить, выполняется ли условие (5) и при его выполнении следует вывод о целесообразности проведения технического обслуживания через конечное время. Если $q(T\to\infty)\to\infty$, то (5) выполняется при любых значениях остальных параметров.

Пусть случайные величины T_3, t_3, T_M, t_M T_{TO}, t_B , независимы и распределены по экспо-

ненциальному закону с параметрами α, γ, τ, δ, θ, μ. Проведем исследование существования корней уравнения (4) для случая, когда функция распределения времени наработки на отказ описывается гамма-распределением (m=2) с параметром λ. В этом случае (4) имеет вид:

$$\frac{\alpha/[\nu(\theta+\alpha)]}{E} = -1+(1+\lambda T)e^{-\lambda T} + \frac{(1+\lambda T)(\lambda+\alpha+\tau)-\lambda}{1+\lambda T}\left\{\frac{B}{\lambda+\alpha+\tau} + \left\{\frac{\alpha}{\alpha+\theta}\left[\frac{K}{\alpha+\mu}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\right)-\frac{R}{\nu}\right]\right\}/E\right\} + \left\{\frac{\lambda^2 T e^{-(\alpha+\lambda+\tau)T}}{\alpha+\mu}\left[\frac{\alpha C}{\alpha+\theta}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\mu}\right)-\frac{R}{\mu}\right] + \alpha C\left(\frac{\tau C}{\alpha+\delta}+LD\right)\left(\frac{1}{\nu(\alpha+\theta)}+\frac{K}{\mu(\alpha+\mu)}\right)\right\} /CE + \frac{\alpha(\alpha+\tau)B}{\mu(\alpha+\mu)E}, \quad (6)$$

где

$$A = \alpha\cdot e^{-(\lambda+\alpha+\tau)T}\times \left[(1+\lambda T)\left(1+\frac{1}{\alpha+\theta}\right)+\frac{\lambda^2 T}{\alpha+\mu}\right]/D;$$

$$B = 1-e^{-(\lambda+\alpha+\tau)T}+\frac{\lambda}{\lambda+\alpha+\tau}\times \left\{1-e^{-(\lambda+\alpha+\tau)T}\left[1+T(\lambda+\alpha+\tau)T\right]\right\};$$

$$C = (1+\lambda T)e^{-(\lambda+\alpha+\tau)T};$$

$$D = \frac{1}{\lambda+\gamma}\left(1+\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\right);$$

$$E = \alpha\left(\frac{1}{\mu(\mu+\alpha)}-\frac{1}{\nu(\alpha+\theta)}\right);$$

$$R = \frac{rB}{(\alpha+\delta)(\lambda+\alpha+\tau)}+AD;$$

$$K = \frac{\lambda^2}{(\lambda+\alpha+\tau)^2}\times \left\{1-e^{-(\lambda+\alpha+\tau)T}\left[1+T(\lambda+\alpha+\tau)\right]\right\};$$

$$L = \alpha\cdot e^{-(\lambda+\alpha+\tau)T}\times \left[\lambda\left(1+\frac{1}{\alpha+\theta}+\frac{\lambda}{\alpha+\mu}\right)- -(\lambda+\alpha+\tau)\right]/D;$$

Легко убедиться в положительност производной функции (6) при T=0. Для решения вопроса о существовании конечного корня уравнения надо проверить выполнение условия (5), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\alpha}{\nu(\alpha+\theta)} < \frac{E\left[1+\lambda/(\alpha+\lambda+\tau)\right]}{\lambda+\alpha+\tau} + \frac{\alpha}{\alpha+\theta}\left[\frac{\lambda^2}{(\alpha+\lambda+\tau)^2(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\right)- -\frac{\tau}{\nu(\alpha+\delta)(\lambda+\alpha+\tau)}\left(1+\frac{\lambda}{\lambda+\alpha+\tau}\right)\right] + \frac{\alpha(\alpha+\tau)}{\mu(\alpha+\mu)}\left(1+\frac{\lambda}{\lambda+\alpha+\tau}\right), \quad (7)$$

где E определяется из (6).

Для рассматриваемого случая выполнение неравенства (7) является достаточным условием существования оптимального периода проведения технического обслуживания.

Таким образом, найдены необходимые и достаточные условия существования оптимального периода технического обслуживания. Существование решения (3) возможно только при

$$\bar{t}_B - M_B > \bar{t}_{TO} - M_{TO}.$$

Следовательно, целесообразность проведения технического обслуживания определяется не только соотношением $\bar{t}_B$ и $\bar{t}_{TO}$, но и рациональным использованием резерва времени M_B, M_{TO}. В этом случае даже при условии $\bar{t}_B < \bar{t}_{TO}$, в отличие от работы [1], проведение технического обслуживания может быть эффективным при выполнении неравенства $M_B < M_{TO}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барзилович Е.Ю.* Модели технического обслуживания сложных систем. - М.: Высшая школа, 1982. – 231 с.

2. *Половко А.М., Гуров С.В* Основы теории надежности. -СПб.: БХВ - Петербург, 2006. -706 с.

Автор статьи:

Шаяхметов
Вениамин Вафич
- канд. техн. наук, доц. каф. информационной безопасности (Башкирский государственный университет)
E-mail: Vafich@mail.ru