

УДК 622.272: 516.02

С.В. Черданцев

**УРАВНЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВИНТОВОЙ КРЕПИ
В РЕЖИМЕ ЗАДАННОЙ НАГРУЗКИ**

Расчетная модель устойчивости винтовой крепи, осевая линия которой является винтовой (рис. 1), разрабатывается в предположении, что материал крепи следует закону Гука, а деформациями удлинения и сдвига пренебрегаются по сравнению с углами поворота.

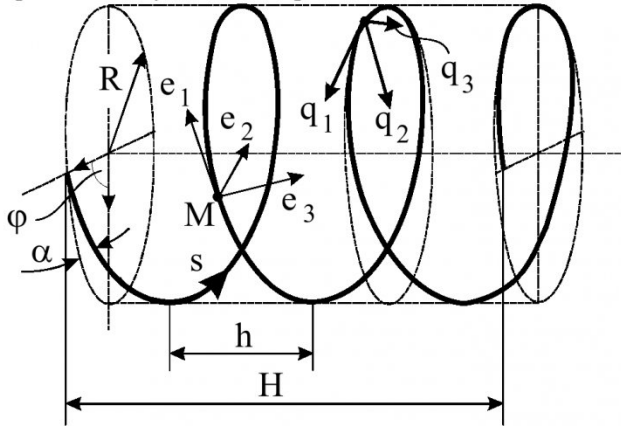


Рис. 1. Геометрические параметры винтовой крепи

Назовем некоторую форму равновесия винтовой крепи *невозмущенной* и рассмотрим достаточно близкие к ней *возмущенные* формы равновесия.

Равновесие крепи назовем устойчивым, если сколь угодно малые «причины» вызывают в ней сколь угодно малые отклонения от невозмущенного равновесия. Если же сколь угодно малые «причины» вызывают конечные отклонения от невозмущенного равновесия крепи, то такое равновесие назовем неустойчивым [1].

Отметим, что роль возмущающего воздействия могут играть различные малые импульсы, малые дополнительные нагрузки, не учтенные в расчете, малые дефекты и отступления от проектных размеров и т.п. Мерой же отклонения от невозмущенного равновесия в винтовой крепи могут служить как перемещения и деформации, так и дополнительные внутренние усилия и моменты, возникающие в ней.

Предположим возмущения, действующие на крепь, достаточно малыми и исследуем их характер, исходя из линеаризованных дифференциальных уравнений. Такое предположение нам представляется вполне уместным, поскольку в подавляющем большинстве технических задач невозмущенное состояние, предшествующее потере устойчивости, как правило, мало отличается от первоначального недеформированного состояния и лишь переход от устойчивости к неустойчивости характеризуется быстрым нарастанием пере-

мещений. Поэтому будем полагать углы поворота осевой линии крепи в невозмущенном (критическом) состоянии достаточно малыми. Тогда невозмущенное состояние винтовой крепи описывается системой дифференциальных уравнений [2]

$$\begin{aligned} \frac{dQ_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \kappa_k Q_i + q_j &= 0, \\ \frac{dM_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \kappa_k M_i - \delta_{2j} Q_3 + \delta_{3j} Q_2 &= 0, \\ \frac{d\vartheta_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \kappa_k \vartheta_i - \frac{1}{A_{jj}} M_j &= 0, \\ \frac{du_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \kappa_k u_i - \delta_{2j} \vartheta_3 + \delta_{3j} \vartheta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и граничными условиями

$$Q_j(0) = 0, M_j(0) = 0, \vartheta_j(l) = 0, u_j(l) = 0 \quad (2)$$

соответствующими консольному закреплению винтовой крепи.

В системе (1) и условиях (2) приняты следующие обозначения: s – координата, связанная с осью винтовой крепи (длина оси l); Q_j – внутренние усилия, M_j – внутренние моменты в произвольном поперечном сечении крепи; ϑ_j – компоненты вектора угла поворота; u_j – компоненты вектора перемещения; κ_j – компоненты кручения и кривизны осевой линии крепи в невозмущенном состоянии; A_{jj} – жесткости поперечного сечения крепи. δ_{ij} , ε_{jki} – соответственно символы Кронекера и Леви-Чивита, определяемые как

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{jki} = \begin{cases} 0 - \text{среди индексов есть одинаковые} \\ 1 - \text{индексы } 123, 312, 231 \\ -1 - \text{индексы } 213, 321, 132 \end{cases}$$

Компоненты q_1, q_2, q_3 распределенной погонной нагрузки создаются весом отслоившихся от массива кусков породы. Следуя [3] компоненты q_1, q_2, q_3 можно определить по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= -\pi p_\sigma R(1 - m) \sin 2\varphi \sin \alpha, \\ q_2 &= \pi p_\sigma R [1 + m + (1 - m) \cos 2\varphi] \operatorname{tg} \alpha, \\ q_3 &= \pi p_\sigma R(1 - m) \sin 2\varphi \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

где $m = p_2/p_\sigma$; p_σ, p_2 – соответственно вертикальная и горизонтальная составляющие поверхностной нагрузки, создаваемые весом пород и

если $p_6 = p_2$, то $m = 1$, поэтому

$$q_1 = 0, \quad q_3 = 0, \quad q_2 = 2\pi p_6 R \operatorname{tg} \alpha \quad (4)$$

и, следовательно, на винтовую крепь будет действовать равномерно распределенная нагрузка, направленная по нормали к ее осевой линии.

Отметим, что решение краевой задачи (1), (2), описывающее невозмущенное состояние винтовой крепи, получено в работе [3]. Здесь приведем аналитические выражения лишь для компонентов внутренних усилий и моментов, поскольку выражения для углов поворота и перемещений слишком громоздки

$$Q_1(\bar{s}) = -\pi p_6 R \operatorname{tg} \alpha \times \left[(1+m)(1 - \cos \bar{s}) + \frac{1}{3}(1-m)(\cos 2\bar{s} - \cos \bar{s}) \right]$$

$$Q_2(\bar{s}) = -\frac{\pi p_6 R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \times \left[1+m + \frac{1}{3}(1-m)(1+2\cos \bar{s}) \right] \sin \bar{s} \quad (5)$$

$$Q_3(\bar{s}) = \pi p_6 R \operatorname{tg}^2 \alpha \times \left[(1+m)(1 - \cos \bar{s}) + \frac{1}{3}(1-m)(\cos 2\bar{s} - \cos \bar{s}) \right]$$

$$M_1(\bar{s}) = -\pi p_6 R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \times \left[(1+m)(\bar{s} \sin \bar{s} + 2\cos \bar{s} - 2) + \frac{1}{9}(1-m)(3\bar{s} \sin \bar{s} + 4\cos \bar{s} + \cos^2 \bar{s} - 5) \right]$$

$$M_2(\bar{s}) = -\frac{\pi p_6 R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos \alpha} \left[(1+m)(\bar{s} \cos \bar{s} - \sin \bar{s}) + \frac{1}{9}(1-m)(3\bar{s} \cos \bar{s} - \sin 2\bar{s} - \sin \bar{s}) \right]$$

$$M_3(\bar{s}) = \frac{\pi p_6 R^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha} \times \left\{ (1+m)[\bar{s} \sin^2 \alpha \sin \bar{s} + \cos 2\alpha(1 - \cos \bar{s})] + \frac{1}{9}(1-m) \times \left[1 + \cos \bar{s} + \cos^2 \alpha(5 - 4\cos \bar{s}) + 3\bar{s} \sin^2 \alpha \sin \bar{s} - (2 + \cos^2 \alpha) \cos^2 \bar{s} \right] \right\}$$

где

$$\bar{s} = \frac{s}{R} \cos \alpha.$$

Рассмотрим далее возмущенное состояние винтовой крепи, компоненты которого ввиду малости описываются следующими соотношениями

$$\tilde{u}_j = u_j + \bar{u}_j, \quad \tilde{\vartheta}_j = \vartheta_j + \bar{\vartheta}_j, \quad \tilde{\kappa}_j = \kappa_j + \Delta \bar{\kappa}_j, \\ \tilde{q}_j = q_j + \bar{q}_j, \quad \tilde{Q}_j = Q_j + \bar{Q}_j, \quad \tilde{M}_j = M_j + \bar{M}_j, \quad (6)$$

в которых $u_j, \vartheta_j, \kappa_j, q_j, Q_j, M_j$ – компоненты невоз-

мущенного состояния крепи, $\tilde{u}_j, \tilde{\vartheta}_j, \tilde{\kappa}_j, \tilde{q}_j, \tilde{Q}_j, \tilde{M}_j$ – компоненты ее возмущенного состояния, а $\bar{u}_j, \bar{\vartheta}_j, \Delta \bar{\kappa}_j, \bar{q}_j, \bar{Q}_j, \bar{M}_j$ представляют собой малые отклонения от невозмущенного состояния.

Компоненты возмущенного состояния (6) также должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (1) и граничным условиям (2)

$$\frac{d(Q_j + \bar{Q}_j)}{ds} + \varepsilon_{jki}(\kappa_k + \Delta \bar{\kappa}_k)(Q_i + \bar{Q}_i) + q_j + \bar{q}_j = 0, \\ \frac{d(M_j + \bar{M}_j)}{ds} + \varepsilon_{jki}(\kappa_k + \Delta \bar{\kappa}_k)(M_i + \bar{M}_i) - \delta_{2j}(Q_3 + \bar{Q}_3) + \delta_{3j}(Q_2 + \bar{Q}_2) = 0, \\ \frac{d(\vartheta_j + \bar{\vartheta}_j)}{ds} + \varepsilon_{jki}(\kappa_k + \Delta \bar{\kappa}_k)(\vartheta_i + \bar{\vartheta}_i) - \frac{1}{A_{jj}}(M_j + \bar{M}_j) = 0, \\ \frac{d(u_j + \bar{u}_j)}{ds} + \varepsilon_{jki}(\kappa_k + \Delta \bar{\kappa}_k)(u_i + \bar{u}_i) - \delta_{2j}(\vartheta_3 + \bar{\vartheta}_3) + \delta_{3j}(\vartheta_2 + \bar{\vartheta}_2) = 0.$$

С учетом уравнения (1), получаем систему уравнений

$$\frac{d\bar{Q}_j}{ds} + \varepsilon_{jki}(\kappa_k \bar{Q}_i + \Delta \bar{\kappa}_k Q_i + \Delta \bar{\kappa}_k \bar{Q}_i) + \bar{q}_j = 0, \\ \frac{d\bar{M}_j}{ds} + \varepsilon_{jki}(\kappa_k \bar{M}_i + \Delta \bar{\kappa}_k M_i + \Delta \bar{\kappa}_k \bar{M}_i) - \delta_{2j} \bar{Q}_3 + \delta_{3j} \bar{Q}_2 = 0, \\ \frac{d\bar{\vartheta}_j}{ds} + \varepsilon_{jki}(\kappa_k \bar{\vartheta}_i + \Delta \bar{\kappa}_k \vartheta_i + \Delta \bar{\kappa}_k \bar{\vartheta}_i) - \frac{1}{A_{jj}} \bar{M}_j = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d\bar{u}_j}{ds} + \varepsilon_{jki}(\kappa_k \bar{u}_i + \Delta \bar{\kappa}_k u_i + \Delta \bar{\kappa}_k \bar{u}_i) - \delta_{2j} \bar{\vartheta}_3 + \delta_{3j} \bar{\vartheta}_2 = 0,$$

анализируя которую, отметим следующее.

Ввиду малости компонентов возмущенного состояния, слагаемые $\Delta \bar{\kappa}_k \bar{Q}_i, \Delta \bar{\kappa}_k \bar{M}_i, \Delta \bar{\kappa}_k \bar{\vartheta}_i, \Delta \bar{\kappa}_k \bar{u}_i$ в уравнениях (7) можно опустить, поскольку они являются членами второго порядка малости [1]. Еще одно упрощение вытекает из предположения о малости углов поворота осевой

линии крепи в невозмущенном состоянии, поэтому можно пренебречь также и слагаемыми $\Delta \bar{\kappa}_k \vartheta_i, \Delta \bar{\kappa}_k u_i$.

В силу сказанного, система уравнений (7) упрощается и с учетом того, что $\Delta \bar{\kappa}_k = \bar{M}_k / A_{kk}$ окончательно приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \left(\kappa_k \bar{Q}_i + \frac{\bar{M}_k}{A_{kk}} Q_i \right) + \bar{q}_j &= 0, \\ \frac{d\bar{M}_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \left(\kappa_k \bar{M}_i + \frac{\bar{M}_k}{A_{kk}} M_i \right) - \\ - \delta_{2j} \bar{Q}_3 + \delta_{3j} \bar{Q}_2 &= 0, \\ \frac{d\bar{\vartheta}_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \kappa_k \bar{\vartheta}_i - \frac{1}{A_{jj}} \bar{M}_j &= 0, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{u}_j}{ds} + \varepsilon_{jki} \kappa_k \bar{u}_i - \delta_{2j} \bar{\vartheta}_3 + \delta_{3j} \bar{\vartheta}_2 = 0.$$

Отметим, что поскольку внешняя нагрузка, создаваемая весом пород, является «мертвой» нагрузкой, то малые отклонения компонентов внешних сил \bar{q}_j [2]

$$\bar{q}_j = A_q \vartheta_j,$$

где

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из условий (2) и в силу выражений (6), получаем граничные условия для дополнительных компонентов внутренних усилий и перемещений $\bar{Q}_j(0) = 0, \bar{M}_j(0) = 0, \bar{\vartheta}_j(l) = 0, \bar{u}_j(l) = 0$. (9)

Уравнения (8), которые, следуя Пуанкаре, принято называть *уравнениями в вариациях*, и граничные условия (9) образуют краевую задачу о статической устойчивости винтовой крепи в «малом».

В проекциях на связанную систему осей уравнения (8) представляются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_1}{ds} + \frac{\bar{M}_2}{A_{22}} Q_3 - \frac{\bar{M}_3}{A_{33}} Q_2 - \kappa_3 \bar{Q}_2 + \kappa_2 \bar{Q}_3 + \bar{q}_1 &= 0 \\ \frac{d\bar{Q}_2}{ds} - \frac{\bar{M}_1}{A_{11}} Q_3 + \frac{\bar{M}_3}{A_{33}} Q_1 + \kappa_3 \bar{Q}_1 - \kappa_1 \bar{Q}_2 + \bar{q}_2 &= 0 \\ \frac{d\bar{Q}_3}{ds} + \frac{\bar{M}_1}{A_{11}} Q_2 - \frac{\bar{M}_2}{A_{22}} Q_1 - \kappa_2 \bar{Q}_1 + \kappa_1 \bar{Q}_2 + \bar{q}_3 &= 0 \\ \frac{d\bar{M}_1}{ds} + \frac{\bar{M}_2}{A_{22}} M_3 - \frac{\bar{M}_3}{A_{33}} M_2 - \kappa_3 \bar{M}_2 + \kappa_2 \bar{M}_3 &= 0 \\ \frac{d\bar{M}_2}{ds} - \frac{\bar{M}_1}{A_{11}} M_3 + \frac{\bar{M}_3}{A_{33}} M_1 + \\ + \kappa_3 \bar{M}_1 - \kappa_1 \bar{M}_3 - \bar{Q}_3 &= 0 \\ \frac{d\bar{M}_3}{ds} + \frac{\bar{M}_1}{A_{11}} M_2 - \frac{\bar{M}_2}{A_{22}} M_1 - \\ - \kappa_2 \bar{M}_1 + \kappa_1 \bar{M}_2 + \bar{Q}_2 &= 0 \\ \frac{d\bar{\vartheta}_1}{ds} - \frac{\bar{M}_1}{A_{11}} - \kappa_3 \bar{\vartheta}_2 + \kappa_2 \bar{\vartheta}_3 &= 0, \\ \frac{d\bar{\vartheta}_2}{ds} - \frac{\bar{M}_2}{A_{22}} + \kappa_3 \bar{\vartheta}_1 - \kappa_1 \bar{\vartheta}_3 &= 0, \\ \frac{d\bar{\vartheta}_3}{ds} - \frac{\bar{M}_3}{A_{33}} - \kappa_2 \bar{\vartheta}_1 + \kappa_1 \bar{\vartheta}_2 &= 0, \\ \frac{d\bar{u}_1}{ds} - \kappa_3 \bar{u}_2 + \kappa_2 \bar{u}_3 &= 0, \\ \frac{d\bar{u}_2}{ds} + \kappa_3 \bar{u}_1 - \kappa_1 \bar{u}_3 - \bar{\vartheta}_3 &= 0, \\ \frac{d\bar{u}_3}{ds} - \kappa_2 \bar{u}_1 + \kappa_1 \bar{u}_2 + \bar{\vartheta}_2 &= 0. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
2. Светлицкий В.А. Механика стержней. Часть I. – М.: Высшая школа, 1987. – 320 с.
3. Краевые задачи о равновесии обжатого винтового стержня / С. В. Черданцев, Н. А. Кучер, С. Н. Рогозин. – Кемерово: Изд.-во Кузбас. гос. техн. ун-т, 2003. – 204 с.

□ Автор статьи:

Черданцев
Сергей Васильевич
– докт.техн.наук, проф. каф.
математики КузГТУ
Тел. 8-3842-39-63-19,
9-3842-53-57-85