ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

В. М. Волков, Е. А. Волкова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТОЧНИКА В КВАЗИЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим в области

$$D(T,x_0)=\{x_0<x<\infty,\ 0<t\le T\}$$

для уравнения

$$u_t=u_{xx}+\sigma(u,x) \tag{1}$$

краевую задачу

$$u|_{t=0}=\varphi(x-x_0),\ x_0\le x<\infty, \tag{2}$$

$$u|_{x=x_0}=\phi(t),\ 0\le t\le T, \tag{3}$$

и пусть относительно ограниченного решения этой задачи известна в точке $x=x_0$ функция

$$u_x|_{x=x_0}=f(t,x_0),\ 0\le t\le T\cdot \tag{4}$$

Теперь предположим, что x_0 изменяется от нуля до бесконечности, тогда наша задача состоит в определении функции $\sigma(u,x)$ по известной функции $f(t,\ x_0)$.

Определение. Будем говорить, что функция $\sigma(u,x)$ принадлежит классу функций $\Omega[R_1,R_2]$, если

$$\sigma(u,x)\in C^{2,3}([R_1,R_2]\times[0,\infty))\cup C((-\infty,\infty)\times[0,\infty))$$

и выполнены следующие условия $\sigma(u,x)\cdot u<0$ при $u\neq0$, $\sigma'_x(u,x)\le0$ при $u\ge0$.

Теорема. Если функция

$$\varphi(x)\in H^{3+\alpha}([0,\infty)),\ \phi(t)\in C^2([0,T]),$$

$$f(t,x_0)\in H^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T]),$$

при любом фиксированном x_0, и удовлетворяют условиям

$$\varphi(x)>0,\ \varphi'(x)<0,\ 0\le x<\infty, \tag{5}$$

$$\phi'(t)\ge\alpha_1,\ 0\le x\le T, \tag{6}$$

$$f(t,x_0)\le\alpha_2,\ 0\le t\le T,\ 0\le x_0<\infty, \tag{7}$$

где α_1 и α_2 - строго положительные постоянные, а также условиям согласования

$$\phi(0)=\varphi(0),\ f(0,x_0)=\varphi'(0),$$

то решение обратной задачи единственно в классе функций $\sigma(u,x)\in\Omega[0,\phi(T)]$ и совпадающих между собой в области $0\le u\le\phi(0),\ 0\le x<\infty$.

Доказательство. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы, мы докажем несколько предварительных утверждений.

Лемма 1. Пусть $u(x,t)$ - ограниченное решение задачи (1) – (3) в области $D(T,x_0)$, причём $\sigma(u,x)$ - ограниченная функция, и выполнено условие $\sigma(u,x)\cdot u<0$, при $u\neq0$. Тогда для $u(x,t)$ справедлива оценка

$$0\le u(x,t)\le\phi(t),\quad 0\le t\le T,\ x_0\le x<\infty\cdot$$

Доказательство. Для доказательства леммы применяем стандартный приём, используемый при получении принципов максимума в [2] и [4]. Аналогичное утверждение доказано в [1], в предположении, что $\sigma(u,x)$ не зависит от x и $x_0=0$.

Лемма 2. В предположениях теоремы существует точка $x^*<\infty$, такая , что в области

$$\{x_0+x^*\le x<\infty,\ 0\le t\le T\}$$

выполнено неравенство $u(x,t)\le\phi(0)$.

Доказательство. В [2] приведено доказательство, что условиях, наложенных на функции $\varphi(x)$, $\phi(t)$ и $\sigma(u,x)$, существует единственное ограниченное решение

$$u(x,t)\in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D}(T,x_0))$$

задачи (1) – (3). Пусть $u(x,t)$ - искомое решение. Тогда $\sigma(u(x,t),x)$ - известная функция. Сделаем в задаче (1) – (3) замену переменных $x=\eta+x_0$, $t=t$. получим задачу

$$u_t=u_{\eta\eta}+\sigma(u,\eta+x_0),\quad (\eta,t)\in(0,\infty)\times(0,T],$$

$$u|_{t=0}=\varphi(\eta),\ 0\le\eta<\infty,$$

$$u|_{\eta=0}=\phi(t),\ 0\le t\le T.$$

Для полученной задачи доказательство леммы приведено в [1].

Лемма 3. При выполнении условий теоремы, в области $\{x_0\le x\le x^*,\ 0\le t\le T\}$ для решения задачи (1) – (3) справедлива оценка

$$u_x(x,t)\le -c<0.$$

Доказательство. Обозначим $u_x=v$.. Тогда для $v(x,t)$ после дифференцирования и замены $x-x_0=\eta,\ t=t$ получим следующую задачу

$$v_t=v_{\eta\eta}+\sigma_u(u,\eta+x_0)\cdot v+$$
$$+\sigma_\eta(u,\eta+x_0),\ (\eta,t)\in(0,\infty)\times(0,T],$$
$$v\big|_{t=0}=\varphi'(\eta),\ 0\le\eta<\infty,$$
$$v\big|_{\eta=0}=f(t,x_0),\ 0\le t\le T.$$

Решение полученной задачи выписывается в следующем интегральном виде

$$v(\eta,t)=\int_0^t d\tau\int_0^\infty \begin{matrix}[Z(\eta,\xi,t,\tau)-Z(\eta,-\xi,t,\tau)]\times\\ \times\sigma_\xi(u(\xi,\tau),\xi+x_0)d\xi\end{matrix}+$$
$$+\int_0^t Z_\xi(\eta,0,t,\tau)f(\tau,x_0)d\tau+$$
$$+\int_0^\infty[Z(\eta,\xi,t,0)-Z(\eta,-\xi,t,0)]\cdot\varphi'(\xi)d\xi, \tag{8}$$

где фундаментальное решение $Z(x,\xi,t,\tau)$, полученное после чётного продолжения $\sigma_u(u,\eta+x_0)$ по η при η<0 , представимо в виде [2]

$$Z(x,\xi,t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right\}+$$
$$+\int_\tau^t d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\lambda)}}\exp\left\{\frac{(x-y)^2}{4(t-\lambda)}\right\}Q(y,\xi,\lambda,\tau)dy,$$

а функция $Q(y,\xi,\lambda,\tau)$ определяется из уравнения Вольтера второго рода

$$Q(y,\xi,\lambda,\tau)+\int_\tau^\lambda d\theta\int_{-\infty}^{\infty}K(y,\eta,\theta,\tau)\cdot Q(\eta,\xi,\theta,\tau)d\eta$$
$$+K(y,\xi,\lambda,\tau)=0$$

с ядром и правой частью следующего вида

$$K(y,\xi,\lambda,\tau)=\sigma_u(u,y+x_0)\times$$
$$\times\frac{1}{2\sqrt{\pi(\lambda-\tau)}}\exp\left\{\frac{(y-\xi)^2}{4(\lambda-\tau)}\right\}\cdot$$

Из приведённых формул можно получить следующие оценки

$$Z_\xi(\eta,0,t,\tau)\ge\left(\frac{C\eta}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}-C_1\right)\exp\left\{-\frac{C\eta^2}{t-\tau}\right\},$$
$$Z(\eta,\xi,t,0)-Z(\eta,-\xi,t,0)\ge\left(\frac{C}{\sqrt{t}}-C_1\sqrt{t}\right)\times$$
$$\times\left(\exp\left\{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4t}\right\}-\exp\left\{-\frac{(\xi+\eta)^2}{4t}\right\}\right).$$

Так как в (8) все три слагаемых не положительны, что можно доказать с помощью принципа максимума, то отбрасывая первое и оценивая два оставшихся слагаемых, получим следующее неравенство

$$v(\eta,t)\le\min\left[\begin{matrix}\left(\frac{C_1}{\eta}-C\right)\cdot\exp\left\{\frac{-C\eta^2}{t}\right\},\\ (C_1\cdot C-C)\left(1-\exp\left\{-\frac{C\eta^2}{t}\right\}\right)\end{matrix}\right].$$

Отсюда видно, что при достаточно большом значении η получим $v(\eta,t)\le -C$, где C , вообще говоря, зависит от η. Теперь покажем, что при достаточно большом $\eta_0\ge x^*$ в области $\{x_0\le x\le x_0+\eta_0,\ 0\le t\le T\}$ справедлива оценка $v(\eta,t)\le -C$. Фиксируем $\eta_0\ge x^*$, такое что $v(\eta_0,t)\le -C$. Сделав замену $v=\frac{1}{\omega}$, получим задачу

$$\omega_t=\omega_{\eta\eta}-\frac{2\omega_\eta^2}{\omega}-\sigma_u(u,\eta+x_0)\omega-$$
$$-\sigma_\eta(u,\eta+x_0),\quad 0<\eta<\eta_0,\quad 0<t\le T,$$

а на границе области $\omega(\eta,t)\ge -C_1$. Тогда из принципа максимума имеем оценку во всей области $\omega(\eta,t)\ge -C_2$. Возвращаясь к функции $v(\eta,t)$, получим требуемое.

Перейдём к доказательству теоремы.

Предположим, что существуют два решения задачи (1) – (4)

$$\{\sigma_1(u_1,x),u_1(x,t)\}\quad\text{и}\quad\{\sigma_1(u_1,x),u_1(x,t)\},$$

причём $\sigma_1(u_1,x)$ и $\sigma_2(u_2,x)\in\Omega[0,\phi(T)]$. Положим $v=u_1-u_2,\ \widetilde{\sigma}(u,x)=\sigma_1(u,x)-\sigma_2(u,x)$. Тогда для v и $\widetilde{\sigma}(u_2,x)$ получим следующую задачу

$$v_t=v_{xx}+A(x,t)\cdot v+\widetilde{\sigma}(u_2,x),$$
$$(x,t)\in D(T,x_0),$$
$$v\big|_{t=0}=0,\ x_0\le x<\infty,$$
$$v_{x=x_0}=0,\ 0\le t\le T,$$
$$v_x\big|_{x=x_0}=0,\ 0\le t\le T,$$

где

$$A(x,t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sigma_1'\left(\frac{u_1-u_2}{2}\cdot s+\frac{u_1+u_2}{2},x\right)ds$$

Сделаем в полученной задаче замену переменных $x-x_0=\eta,\ t=t$, тогда

$$v_t=v_{xx}+A(x,t)\cdot v+\widetilde{\sigma}(u_2,x),\ (x,t)\in D(T,x_0) \tag{9}$$

$$v\big|_{t=0} = 0,\ x_0 \le x < \infty, \qquad (10)$$

$$v_{x=x_0} = 0,\ 0 \le t \le T, \qquad (11)$$

$$v_x\big|_{x=x_0} = 0,\ 0 \le t \le T\ . \qquad (12)$$

После чётного продолжения $A(\eta + x_0, t)$, $u_2(\eta + x_0 t)$ по η при $\eta<0$, решение задачи (9), (10), (12) выписывается в виде [2]

$$v(\eta,t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{R^- + R^+}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \widetilde{\sigma}(u_2, \xi + x_0)d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^\infty dy \int_\tau^t d\lambda \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp\left\{-\dfrac{(\eta-y)^2}{4(t-\lambda)}\right\}}{2\sqrt{\pi(t-\lambda)}} Q^* d\xi.$$

где

$$R^{Ї} = \exp\left\{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right\},\ R^+ = \exp\left\{-\frac{(\xi+\eta)^2}{4(t-\tau)}\right\},$$

$$Q^* = \left[Q(y,\xi,\lambda,\tau) + Q(y,-\xi,\lambda,\tau)\right]\widetilde{\sigma}(u_2, \xi + x_0)$$

Используя условие (11), получим уравнение для определения $\widetilde{\sigma}(u_2, x)$

$$\int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{\exp\left\{-\dfrac{\xi^2}{4(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \widetilde{\sigma}(u_2, \xi + x_0)d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^\infty dy \int_\tau^t d\lambda \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp\left\{-\dfrac{y^2}{4(t-\lambda)}\right\}}{2\sqrt{\pi(t-\lambda)}} Q^* d\xi = 0$$

Переходя от переменных (ξ, τ) к новым переменным (ξ, τ), что возможно в силу справедливости приведённых выше лемм, по формулам $\tau = \tau$, $s = \phi^{-1}(u_2(\xi + x_0, \tau))$, и используя условие $\widetilde{\sigma}(u_2, x) = 0$ при $u_2 \in [0, \phi(0)]$, приведём уравнение к виду

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau K_1(t,s,\tau,x_0) \cdot \widetilde{\sigma}\begin{pmatrix}\phi(s), \\ \xi(\phi(s),\tau) + x_0\end{pmatrix} \phi'(s)ds = 0,$$

$$0 \le t \le T,\ 0 \le x_0 < \infty,$$

где

$$K_1(t,s,\tau,x_0) = \exp\left\{-\frac{\xi^2(\phi(s),\tau)}{4(t-\tau)}\right\} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)} \cdot u_{2\xi}} + \frac{1}{u_{2\xi}} \cdot \int_\tau^t d\lambda \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right\} \times$$

$$\div \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \begin{bmatrix} Q(y, \xi(\phi(s),\tau), \lambda, \tau) + \\ + Q(y, -\xi(\phi(s),\tau), \lambda, \tau)\end{bmatrix} dy.$$

Пусть

$$q(\phi(s), \xi(\phi(s),\tau) + x_0) =$$

$$= \int_0^s \widetilde{\sigma}(\phi(t), \xi(\phi(t),\tau) + x_0)\phi'(t)dt,$$

тогда для $q(\phi(s), \xi(\phi(s),\tau) + x_0)$ имеем следующее уравнение

$$\int_0^t K_1(t,\tau,\tau,x_0) \cdot q(\phi(\tau), x_0)d\tau - \qquad (13)$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\partial K_1(t,s,\tau,x_0)}{\partial s} \times q(\phi(s), \xi(\phi(s),\tau) + x_0)ds = 0,$$

$$0 \le t \le T,\ 0 \le x_0 < \infty.$$

Ядро $K_1(t,\tau,\tau,x_0)$ имеет особенность $(t-\tau)^{-1/2}$, поэтому уравнение (13) можно свести к уравнению Вольтера второго рода, применяя приём Абеля [3]. Для этого умножим уравнение (13) на $(x-t)^{-1/2}$, проинтегрируем его в пределах от нуля до x, и меняя в получившемся интеграле порядок интегрирования, находим

$$\int_0^x q(\phi(\tau), x_0)d\tau \int_\tau^x \frac{K_1(t,\tau,\tau,x_0)}{\sqrt{x-t}}dt -$$

$$-\int_0^x d\tau \int_\tau^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}} \int_0^\tau \frac{\partial K_1(t,s,\tau,x_0)}{\partial s} \times q(\phi(s), \xi(\phi(s),\tau) + x_0)ds = 0,$$

при $0 \le x \le T,\ 0 \le x_0 < \infty$.

Стоящая в первом слагаемом под знаком интеграла функция

$$H_1(x,\tau) = \int_\tau^x \frac{K_1(t,\tau,\tau,x)}{\sqrt{x-t}}dt$$

имеет конечное значение, отличное от нуля при $\tau=x$. Тогда, полагая

$$Q(\phi(s), \xi(\phi(s),\tau) + x_0) =$$

$$= \int_0^s q(\phi(t), \xi(\phi(t),\tau) + x_0)dt,$$

для функции $Q(\phi(x), x_0)$ получим уравнение Вольтера второго рода, ввиду интегрируемости функций $\dfrac{\partial H_1(x,\tau)}{\partial \tau}$ и $\dfrac{\partial H_2(x,\tau,s)}{\partial s}$,

где

$$H_2(x,\tau,s) = \int_\tau^x \frac{\partial K_1(t,s,\tau,x_0)}{\partial s} \cdot \frac{dt}{\sqrt{x-t}}.$$

Следовательно, уравнение (13) сводится к уравнению Вольтера второго рода, которое, как известно, имеет единственное решение. Таким образом, теорема единственности доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волков, В. М.* Обратная задача для квазилинейного уравнения параболического типа// В сб.: Исследование корректности обратных задач и некоторых операторных уравнений, Новосибирск, 1981. - С. 27-36.

2. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа/ О.А. Ладыженская, В. А. Солонников, М. Н. Уральцев. – М.: Наука, 1967.- 736 с.

3. *Музылёв, Н. В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности// Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1980.- Т. 20.- № 2.- С. 386-398.

4. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики/ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.- М.: Наука, 1966.- 735 с.

 Авторы статьи:

Волков Владимир Матвеевич - канд.физ.-мат.наук, доц. каф.математики КузГТУ, тел. 8-3842-37-43-16

Волкова Екатерина Анатольевна - канд.физ.-мат.наук, доц. каф.математики КузГТУ, тел. 8-3842-37-43-16

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

О СЛУЧАЙНЫХ СТРУКТУРАХ

Многие геометрические структуры природного и технологического происхождения являются случайными. В качестве типичного примера рассмотрим сети трещин, которые рассекают массивы горных пород на структурные блоки. Обычно выделяют три основных вида таких сетей – системные, хаотические и полигональные. Геометрической моделью сетей первого вида является разбиение пространства тремя попарно ортогональными системами параллельных плоскостей. В каждой из них расстояние между соседними параллельными плоскостями есть случайная величина x с плотностью распределения

$$f(x) = 6x(x_0 - x)/x_0^3,$$

где x_0 - набольшее значение величины x. Моменты этого распределения равны

$$M_1=0.5\,x_0,\ M_2= M._1^{\,2}=0.3\,x_0^2\ ,$$
$$M_3= 1.6M_1^3=0.2\,x_0^3$$

Пусть x и v - площадь поверхности и объем структурного блока. Важную роль при изучении фильтрационных свойств породного массива играет отношение cM_2/M_3 , где $c=xs/v$ – мера сферичности блока. Случайная величина c имеет незначительную вариацию с центром рассеяния $c=8$, поэтому среднее значение отношения cM_2/M_3 равно $6/M_1$.

Объемное содержание блоков с линейными размерами от 0 до x дает значение гранулометрической функции $F(x)$ получаемое интегрированием отношения $x^3f(x)/M_3$ в границах от 0 до x:

$$F(x) = 6(x/x_0)^5 - 5(x/x_0)^6.$$

Геометрической моделью хаотической сети трещин является разбиение пространства пуассоновским множеством плоскостей. Случайное множество плоскостей, заданных уравнениями вида $Ax+By+Cz=1$, называется пуассоновским, если случайные точки с координатами $(A,B,`C)$ имеют распределение Пуассона, т. е. вероятность попадания n точек в область единичного объема равна $\lambda^n / n!e^{\lambda}$. Отметим, что параметр λ равен среднему числу плоскостей, пересекающих единичный отрезок произвольной ориентации. При таком разбиении пространства структурные блоки являются выпуклыми многогранниками, для которых найдены средние значения основных геометрических характеристик [1]. В частности,

$$E(s) = 24/\pi\lambda^2, \quad E(s^2) = 240\lambda^4,$$
$$E(v) = 6/\pi\lambda^3, \quad E(v^2) = 48/\lambda^6,$$

где E - математическое ожидание величины.

По первым двум моментам распределений случайных величин s и v можно легко вычислить их коэффициенты вариации w(s) и $w(v)$:

$$w^2(s) = 4 \quad \text{и} \quad w^2(v)=12,$$

что позволяет найти аппроксимации этих распределений в классе гамма–распределений с параметром формы $1/w^2$.

Суммарная площадь поверхности блоков в единичном объеме, характеризующая трещинную пустотность и фильтрационные свойства породного массива, равна

$$E(s)/E(v) = \left(24/\pi\lambda^2\right)/\left(6/\pi\lambda^3\right) = 4\lambda.$$

Отметим также, что средняя длина секущих выпуклого тела, равная $4v/s$, в рассматриваемом случае принимает значение $1/\lambda$. Этот факт с несколько иной позиции проясняет смысл λ..

Полигональные сети трещин обычно ограни-