СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волков, В. М.* Обратная задача для квазилинейного уравнения параболического типа// В сб.: Исследование корректности обратных задач и некоторых операторных уравнений, Новосибирск, 1981. - С. 27-36.

2. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа/ О.А. Ладыженская, В. А. Солонников, М. Н. Уральцев. – М.: Наука, 1967.- 736 с.

3. *Музылёв, Н. В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности// Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1980.- Т. 20.- № 2.- С. 386-398.

4. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики/ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.- М.: Наука, 1966.- 735 с.

 Авторы статьи:

Волков Владимир Матвеевич - канд.физ.-мат.наук, доц. каф.математики КузГТУ, тел. 8-3842-37-43-16

Волкова Екатерина Анатольевна - канд.физ.-мат.наук, доц. каф.математики КузГТУ, тел. 8-3842-37-43-16

УДК 519. 21

А.В. Бирюков

О СЛУЧАЙНЫХ СТРУКТУРАХ

Многие геометрические структуры природного и технологического происхождения являются случайными. В качестве типичного примера рассмотрим сети трещин, которые рассекают массивы горных пород на структурные блоки. Обычно выделяют три основных вида таких сетей – системные, хаотические и полигональные. Геометрической моделью сетей первого вида является разбиение пространства тремя попарно ортогональными системами параллельных плоскостей. В каждой из них расстояние между соседними параллельными плоскостями есть случайная величина x с плотностью распределения

$$f(x) = 6x(x_0 - x)/x_0^3,$$

где x_0 - набольшее значение величины x. Моменты этого распределения равны

$$M_1=0.5\,x_0,\ M_2= M._1^{\,2}=0.3\,x_0^2\ ,$$
$$M_3= 1.6M_1^3=0.2\,x_0^3$$

Пусть x и v - площадь поверхности и объем структурного блока. Важную роль при изучении фильтрационных свойств породного массива играет отношение cM_2/M_3, где $c=xs/v$ – мера сферичности блока. Случайная величина c имеет незначительную вариацию с центром рассеяния $c=8$, поэтому среднее значение отношения cM_2/M_3 равно $6/M_1$.

Объемное содержание блоков с линейными размерами от 0 до x дает значение гранулометрической функции $F(x)$ получаемое интегрированием отношения $x^3f(x)/M_3$ в границах от 0 до x:

$$F(x) = 6(x/x_0)^5 - 5(x/x_0)^6.$$

Геометрической моделью хаотической сети трещин является разбиение пространства пуассоновским множеством плоскостей. Случайное множество плоскостей, заданных уравнениями вида $Ax+By+Cz=1$, называется пуассоновским, если случайные точки с координатами $(A,B,`C)$ имеют распределение Пуассона, т. е. вероятность попадания n точек в область единичного объема равна $\lambda^n / n!e^{\lambda}$. Отметим, что параметр λ равен среднему числу плоскостей, пересекающих единичный отрезок произвольной ориентации. При таком разбиении пространства структурные блоки являются выпуклыми многогранниками, для которых найдены средние значения основных геометрических характеристик [1]. В частности,

$$E(s) = 24/\pi\lambda^2, \quad E(s^2) = 240\lambda^4,$$
$$E(v) = 6/\pi\lambda^3, \quad E(v^2) = 48/\lambda^6,$$

где E - математическое ожидание величины.

По первым двум моментам распределений случайных величин s и v можно легко вычислить их коэффициенты вариации w(s) и $w(v)$:

$$w^2(s) = 4 \quad \text{и} \quad w^2(v)=12,$$

что позволяет найти аппроксимации этих распределений в классе гамма–распределений с параметром формы $1/w^2$.

Суммарная площадь поверхности блоков в единичном объеме, характеризующая трещинную пустотность и фильтрационные свойства породного массива, равна

$$E(s)/E(v) = \left(24/\pi\lambda^2\right)/\left(6/\pi\lambda^3\right) = 4\lambda.$$

Отметим также, что средняя длина секущих выпуклого тела, равная $4v/s$, в рассматриваемом случае принимает значение $1/\lambda$. Этот факт с несколько иной позиции проясняет смысл λ..

Полигональные сети трещин обычно ограничены одним породным слоем и ортогональны к нему. В этом случае вместо разбиения пространства на блоки достаточно рассматривать соответствующее разбиение плоскости на многоугольники, которые называются многоугольниками Вороного. Для них известны первый и второй моменты распределения площади [2]:

$$E(s) = 1/\lambda, \quad E(s^2) = 1{,}28/\lambda^2,$$

где λ - плотность пуассоновского поля центров многоугольников. Отсюда непосредственно получается значение коэффициента вариации случайной величины s : $w(s)=0.529$. Это значение практически совпадает с коэффициентом вариации ($w=0.523$) случайной величины, распределенной по закону Рэлея с плотностью

$$f(s) = \pi\lambda^2 s \cdot exp(-0{,}5\pi\lambda^2 s^2).$$

Экспериментальную оценку параметра λ можно получить, измеряя расстояние от случайно выбранного центра до ближайшего из центров соседних многоугольников: $\lambda=1/\pi r^2$, где r^2 - средний квадрат расстояния. Функция распределения площади многоугольников (доля многоугольников с площадью, меньшей s) имеет вид

$$F(s) = 1 - exp(-0{,}5\pi\lambda^2 s^2).$$

Гранулометрический анализ обычно проводится на основе репрезентативной выборки, содержащей результаты измерений частиц дисперсной системы, но измерение частиц не всегда возможно. Так, если частицы погружены в твердую среду, то измерениям доступны лишь их сечения случайной плоскостью (например, при анализе петрографических шлифов).

Восстановление свойств трехмерных объектов по их случайным сечениям является в общем виде нерешенной проблемой. Здесь получены результаты лишь для некоторых частных случаев. Для шаров случайного диаметра, между моментами распределения диаметра шаров M_k и распределения диаметра сечений N_k выполняются следующие соотношения [3, с. 251]:

$$M_1=\pi/2N_{-1},\ M_2=2N_1/N_{-1},\ M_3=3\pi N_2/4N_{-1}$$

Рассмотрим дисперсную систему, состоящую из частиц случайных размеров и формы, расположенных в некоторой трехмерной области D так, что каждая частица касается других частиц. Пусть A - множество всех частиц дисперсной системы и B - множество частиц, лежащих в ее граничном слое (т.е. видимых частиц). Обычно в основе гранулометрического анализа лежит выборка, содержащая результаты измерений частиц из множества B. Но поскольку мелкие частицы просеиваются внутрь области D, эта выборка не репрезентативна, что ведет к ошибкам при оценке гранулометрических характеристик дисперсной системы.

Обозначим через $f(x)$ и $g(x)$ плотности распределения диаметра частиц из множеств A и B, а через M_k и N_k - моменты порядка k этих распределений. Так как доля крупных частиц во множестве B больше, чем в A, существует значение x_0 диаметра частиц, для которого $f(x) < g(x)$ при $x>x_0$ и $f(x) >g(x)$ при $x<x_0$

Этим условиям соответствует простейшая модель вида

$$f(x) = (x_0/x)^p \cdot g(x),$$

где значение параметра p зависит от формы области D и от физических свойств дисперсной системы. Интегрируя обе части этого соотношения между плотностями распределений, получаем

$$x_0^p = 1/N_{-p},\ M_k = N_{k-p}/N_{-p},$$

$$f(x) = g(x)x^{-p}/N_{-p}.$$

Как показывают результаты экспериментов с варьированием числа частиц в множествах A и B, значения параметра p лежат в интервале [1,2]. Если $p=1$, то $M_k = N_{k-1}/N_{-1}$ и в частности,

$$M_1 = 1/N_{-1}, \quad M_2 = N_1/N_{-1}.$$

Отметим, что эти формулы аналогичны приведенным выше соотношениям моментов для системы шаров и ее сечения случайной плоскостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miles R.E.* The random division of space. // Advances in Appl. Probability Suppl., 1972. – P. 243-266.
2. *Meijtring J.L.* Interface area, edge length and number of vertices in crystal aggregates with random nucleation. // Philips Research Rept., 1953. – V. 8. – P. 270-290.
3. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. – М.: Наука, 1983. – 358 с.

Автор статьи:

Бирюков
Альберт Васильевич
- докт.техн.наук, проф.каф. высшей математики КузГТУ
Тел. 8-3842-39-63-19