УДК 330.43

И. А. Ермакова, А. С. Конишевскис

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СРЕДНИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ЭЛАСТИЧНОСТИ И ЕГО ПРЕИМУЩЕСТВА

Применение регрессионного анализа позволяет получить модели, которые отражают влияние рассматриваемых факторов на конечный результат. На практике, в качестве рассматриваемых факторов x могут выступать различные макро- и микроэкономические величины, а также личные данные людей, являющиеся объектом анализа. Для выявления степени влияния факторов на конечный результат, в частности при анализе экономических величин, используется коэффициент эластичности:

$$E = E(x) = \frac{y'(x) \cdot x}{y(x)}, \qquad (1)$$

где $y(x)$ – функция регрессии.

Коэффициент эластичности может рассчитываться для конкретного значения $x=x_0$, и в этом случае он показывает, на сколько процентов изменится конечный результат y при увеличении фактора x на 1% от уровня x_0.

Так как коэффициент эластичности в общем случае зависит от соответствующего значения x, то обычно рассчитывается средний коэффициент эластичности $\overline{E}$. В этом случае в формулу (1) подставляется среднее значение x из наблюдаемого интервала, то есть $x = \overline{x}$, а найденный коэффициент показывает, на сколько процентов изменится y относительно своего среднего значения при росте x на 1% относительно своего среднего значения [1, 2].

Важность средних коэффициентов эластичности заключается в следующем:

1) если в модель включен один фактор, то можно оценить его влияние на результат;

2) если результат зависит от нескольких факторов, то можно определить силу влияния каждого фактора на результат; выбрать фактор, оказывающий наибольшее влияние; дать рекомендации по изменению значений некоторых факторов для достижения необходимого результата.

Однако известный метод нахождения среднего коэффициента эластичности не всегда дает приемлемые результаты. В данной работе предлагается находить этот параметр как среднее значение непрерывной функции на интервале [3] с использованием интегрального исчисления:

$$\overline{E}_u = \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} E(x)dx, \qquad (2)$$

где α и β – соответственно наименьшее и наибольшее значение наблюдаемых значений фактора x. Рассчитанный таким образом параметр $\overline{E}_u$ предлагается называть интегральным средним коэффициентом эластичности.

Такой подход к расчету среднего коэффициента эластичности в литературе не рассматривался, поэтому в работе сделано сравнение двух методов расчета данного параметра и рассмотрены причины различия значений средних коэффициентов эластичности в зависимости от применяемого метода расчета.

Рассмотрим простейший случай, когда на конечный результат влияет лишь один фактор, причем зависимость между ними – линейная. Линейное уравнение парной регрессии имеет вид:

$$y(x) = a + b \cdot x. \qquad (3)$$

Коэффициенты a и b функции (3) находятся по методу наименьших квадратов. Подразумевается, что найденное уравнение регрессии значимо и адекватно. Функция эластичности линейной парной регрессии согласно (1) имеет вид:

$$E(x) = \frac{b \cdot x}{a + b \cdot x} = \frac{b \cdot x + a}{a + b \cdot x} - \frac{a}{a + b \cdot x} = 1 - \frac{a}{a + b \cdot x} \qquad (4)$$

Так как переменная x находится в знаменателе, то данная функция является гиперболической, и ее график имеет две асимптоты. Горизонтальная асимптота находится на единицу выше оси абсцисс, ее уравнение $y_a = 1$, а вертикальная асимптота имеет уравнение $x_a = -\frac{a}{b}$, так как при таком значении x знаменатель (4) обращается в ноль, и поэтому при $x \to x_a$ $\lim E(x) = \pm\infty$.

Так как в большинстве рассматриваемых случаев экономические величины принимают только положительные значения, то будем рассматривать функции регрессии и эластичности для условий:

$$\begin{cases} x \geq 0; \\ y(x) > 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Поведение функции эластичности зависит от того, какие знаки имеют коэффициенты a и b. Всего возможны четыре комбинации знаков:

$$-a/-b; \quad -a/+b; \quad +a/-b; \quad +a/+b.$$

1 случай: $a < 0$, $b < 0$. При любом значении $x \geq 0$ значения y принимают только отрицательные значения, что не удовлетворяет условиям (5), поэтому такие уравнения регрессии не рассматриваются в настоящей статье.

2 случай: $a < 0$, $b > 0$. В качестве примера рассмотрим уравнение регрессии $y = -50 + 5x$, где a = -50, b =5, график линии показан на рис. 1а).

Функция эластичности имеет уравнение $E = 1 + \dfrac{50}{-50 + 5 \cdot x}$, и ее график показан на рис. 1б). Вертикальная асимптота имеет уравнение $x_a = -\dfrac{-50}{5} = 10$. Так как y>0 при x>10 , то оба графика рассматриваются именно при этих значениях x.

Вычислим средний коэффициент эластичности $\overline{E}$ на различных промежутках двумя методами и сравним результаты.

Пусть уравнение регрессии и функция эластичности получены для x, принимающих значения в интервале 1 (рис.1б), то есть при $x \in$[10,5; 15].

Значения коэффициента эластичности на этом интервале значительно и неравномерно убывают, и на границах интервала принимают следующие значения (4):

$$E(10{,}5) = 1 + \frac{50}{-50 + 5 \cdot 10{,}5} = 21,$$

$$E(15) = 1 + \frac{50}{-50 + 5 \cdot 15} = 3.$$

Согласно существующему методу найдем среднее значение x (как середину рассматриваемого интервала):

$$\overline{x} = \frac{10{,}5 + 15}{2} = 12{,}75,$$

тогда средний коэффициент эластичности

$$\overline{E} = E(12{,}75) = 1 + \frac{50}{-50 + 5 \cdot 12{,}75} = 4{,}64.$$

Очевидно, что это значение меньше ожидаемого, и не может служить достаточно точной оценкой значения искомого параметра.

Теперь вычислим средний коэффициент эластичности на этом промежутке интегральным методом, используя (2). Так как

$$\int_\alpha^\beta E(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(1 - \frac{a}{a + b \cdot x}\right)dx =$$

$$= \left[x - \frac{a}{b} \cdot ln(a + b \cdot x)\right]\Bigg|_\alpha^\beta =$$

$$= \beta - \alpha + \frac{a}{b} ln \frac{a + b \cdot \alpha}{a + b \cdot \beta},$$

то

$$\overline{E}_u = \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \int_\alpha^\beta E(x)dx = 1 + \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \frac{a}{b} ln \frac{a + b \cdot \alpha}{a + b \cdot \beta}. \quad (6)$$

Подставив имеющиеся значения в (6), получим, что

$$\overline{E}_u = 1 + \frac{1}{15 - 10{,}5} \cdot \frac{-50}{5} \cdot ln \frac{-50 + 5 \cdot 10{,}5}{-50 + 5 \cdot 15} = 6{,}12.$$

Полученное значение отличается от ранее рассчитанного почти в полтора раза и является более приемлемым для оценки среднего коэффициента эластичности на данном интервале.

Далее рассмотрим вариант, когда фактор x принимает значения из промежутка 2 (см. рис.1б), то есть $x \in$ [15; 20]. Найдем средний коэффициент эластичности по формуле (4):

$$\overline{E} = E(\overline{x}) = E\left(\frac{15 + 20}{2}\right) = E(17{,}5) = 2{,}33,$$

и интегральным методом по (6):

$$\overline{E}_u = 2{,}39.$$

Относительная разница между полученными результатами составляет всего 2,6%, что весьма незначительно. Небольшая разница в расчетах

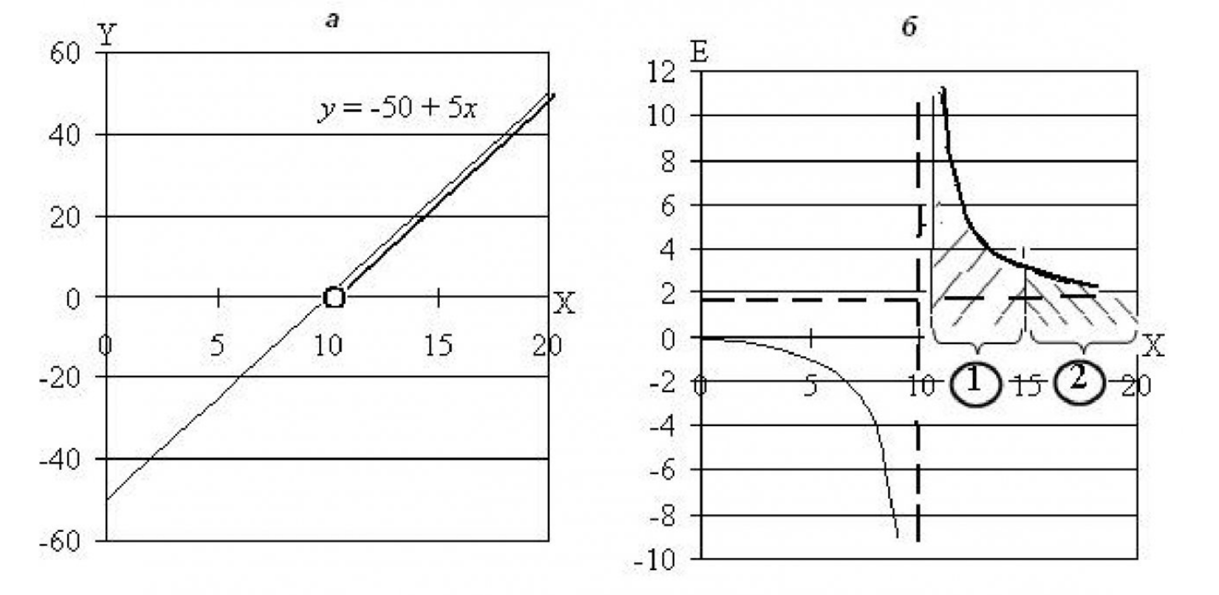

Рис. 1. График уравнения регрессии (а) и функции эластичности (б) при $a < 0$, $b > 0$

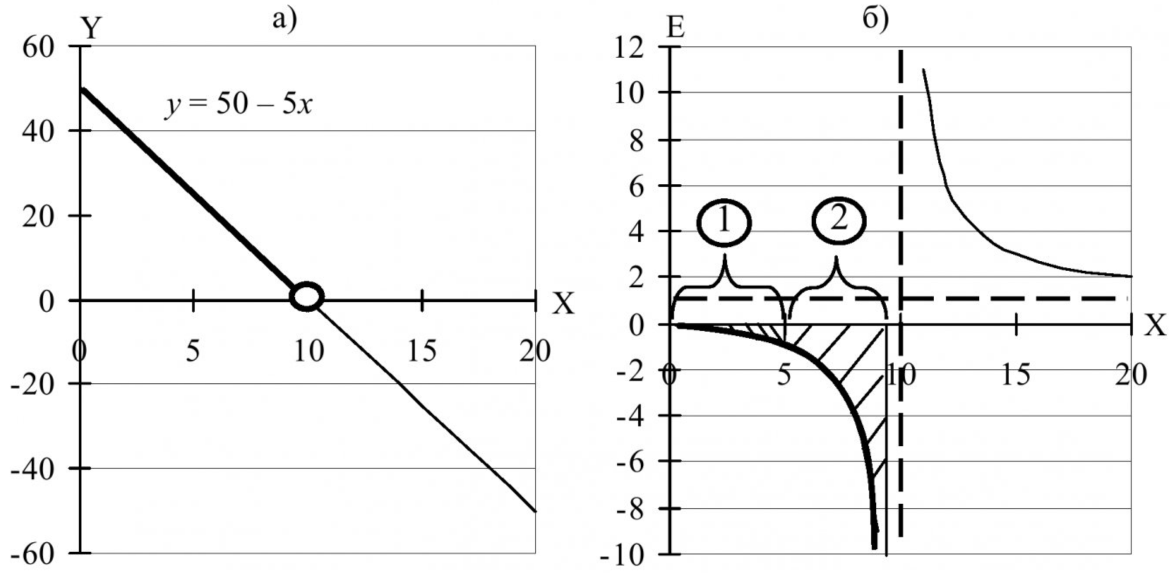

Рис. 2. *График уравнения регрессии(а) и функции эластичности (б) при* $a > 0,\ b < 0$

объясняется тем, что на промежутке 2 график функции эластичности имеет незначительную вогнутость и приближается по форме к прямой линии.

3 случай: $a > 0$, $b < 0$. Используем те же абсолютные значения коэффициентов, которые были использованы в предыдущем примере, но возьмём их с другими знаками: коэффициенты a и b будут равны 50 и -5 соответственно, то есть $y = 50 - 5x$ (рис. 2а).

График функции эластичности $E = 1 - \dfrac{50}{50 - 5 \cdot x}$ показан на рис. 2б). Вертикальная асимптота имеет уравнение x_a= - (50)/ (-5)=10 . Отметим, что для второго и третьего случаев, где один из коэффициентов принимает отрицательное значение, всегда $x_a>0$.

Для данного примера условиям (5) удовлетворяет $x \in [0; 10)$, и оба графика рассматриваются на этом интервале.

Разобьём этот интервал на две части 1 и 2 (см. рис. 2б) и рассчитаем для них средние коэффициенты эластичности двумя методами.

На промежутке 1 для $x \in [0; 5]$ согласно существующему методу

$$\overline{E} = E\left(\frac{0+5}{2}\right) = E(2{,}5) = 1 - \frac{50}{50 - 5 \cdot 2{,}5} = -0{,}33 \cdot$$

Методом интегрального исчисления (6):

$$\overline{E}_u = 1 + \frac{1}{5-0} \cdot \frac{50}{-5} \cdot ln \frac{50 - 5 \cdot 0}{50 - 5 \cdot 5} = -0{,}39 .$$

Разница между результатами очень мала и составляет 0,06 %. Это так же, как и в случае 2, объясняется тем, что на рассматриваемом промежутке график по форме близок к прямой линии.

Теперь вычислим средний коэффициент эластичности для промежутка 2, который близок к вертикальной асимптоте, здесь $x \in [5; 9{,}5]$.

$$\overline{E} = E\left(\frac{5+9{,}5}{2}\right) = E(7{,}25) = -2{,}64 .$$

Интегральный средний коэффициент эластичности

$$\overline{E}_u = -4{,}12 .$$

Разница между полученными значениями достаточно велика, и так же, как и в случае 2, значение $\overline{E}_u$ является более точным значением среднего коэффициента эластичности.

4 случай: $a > 0$, $b > 0$. Имеем уравнение регрессии $y = 50 + 5x$ и соответствующую функцию эластичности $E = 1 - \dfrac{50}{50 + 5 \cdot x}$. Вертикальная асимптота последнего графика $x_a = -\dfrac{50}{5} = -10$ и в данном случае всегда $x_a<0$

Оба графика (рис. 3) с учетом (5) рассматриваются на интервале $x \in [0; \infty)$.

На этом интервале график функции эластичности имеет небольшую выпуклость, приближаясь к горизонтальной асимптоте.

На промежутке $x \in [0;20]$ имеем

$$\overline{E} = E(10) = 1 - \frac{50}{50 + 5 \cdot 10} = 0{,}5 ,$$

а по методу интегрального исчисления

$$\overline{E}_u = 1 + \frac{1}{20-0} \cdot \frac{50}{5} \cdot ln \frac{50 - 5 \cdot 0}{50 + 5 \cdot 20} = 0{,}45 \cdot$$

В рассматриваемом случае результаты, полученные двумz методамb, можно считать равными, что обусловлено поведением функции эла-

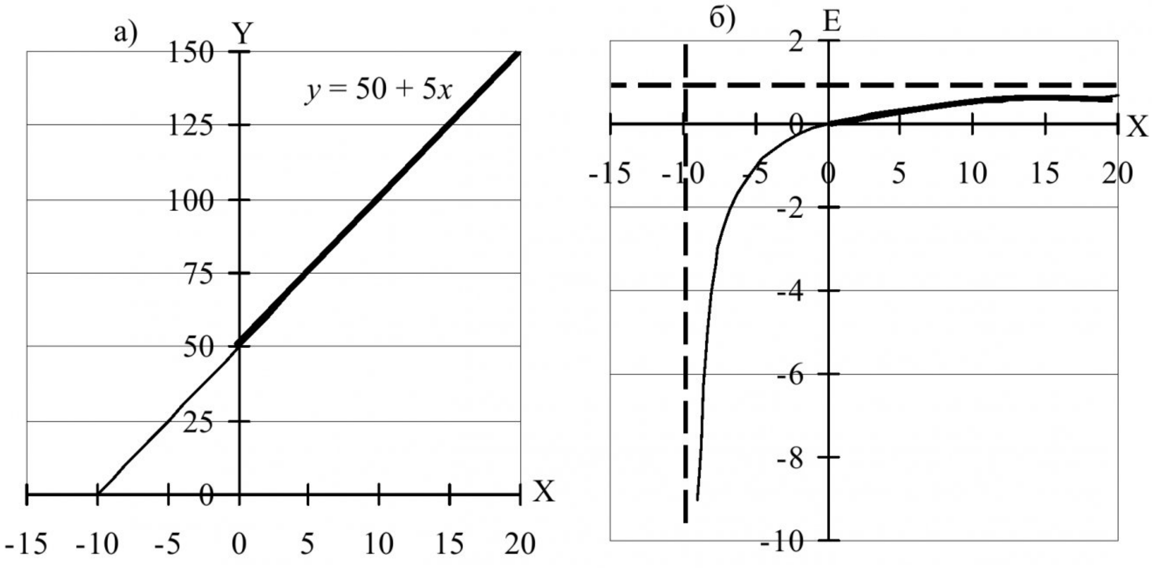

Рис. 3. *График уравнения регрессии(а) и функции эластичности (б) при* $a > 0,\ b > 0$

стичности на данном промежутке.

На основе проведённого исследования сделан ряд выводов.

1. Использование интегрального метода даёт объективное значение среднего коэффициента эластичности для рассматриваемого промежутка, так как учитывает непрерывное изменение функции эластичности и соответствующие каждому значению фактора *x* значения функции эластичности.

2. В некоторых случаях интегральный средний коэффициент эластичности на промежутке может значительно отличается от соответствующего коэффициента, полученного для середины этого промежутка. При этом существующий способ расчета рассматриваемого параметра может искажать картину реального положения дел.

3. Различия между средними коэффициентами эластичности, вычисленными по двум методам существенны, если коэффициенты уравнения регрессии $y(x) = a + b \cdot x$ имеют ротивоположные знаки, и увеличиваются при приближении анализируемого промежутка к значению $-b/a$.

4. Существующий метод расчета среднего коэффициента эластичности для середины промежутка может использоваться в случаях, когда в уравнении регрессии a и b больше нуля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эконометрика: Учебник/ Под ред. И. И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.

2. *Нименья И. Н.* Эконометрика. – СПб.: Издательский Дом «Нева», 2003. – 224 с.

3. *Бермант А. Ф.* Краткий курс математического анализа: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям: "Естественные науки и математика" (510000), "Технические науки"(550000), "Педагогические науки"(540000) / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб.: Лань , 2009. – 736 с.

Авторы статьи:

Ермакова
Инна Алексеевна
- докт. техн. наук, проф.
каф. математики КузГТУ
E-mail: inna-e@inbox.ru
Тел. 8-3842-51-67-34

Конишевскис
Александр Сергеевич
- студент гр. ФМ-072 (каф.
финансов и кредита РГТЭУ),
Тел. 8 960 909 93 68