

## ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ И СИСТЕМЫ

**УДК 621.372.54**

**Б.В. Соколов, Т.Г. Шевцова**

### МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОПУСКОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ИНВАРИАНТЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

**Общие положения.** При синтезе цепей, удовлетворяющих жестким требованиям, из-за разброса параметров элементов возникает проблема определения их допусков. Эта задача актуальна при анализе параметров цепей, при выборе подходящей эквивалентной схемы и оптимизации в процессе структурного (итерационного) синтеза, а также при синтезе систем автоматического управления и цепей с регулируемыми параметрами.

Существует множество причин, по которым возникают отклонения между номинальными значениями функций цепей, найденными аналитическим (расчетным) путем, и действительными (фактическими) значениями этих функций. Среди множества этих причин выделим одну из них, суть которой заключается в том, что при производстве цепей используются компоненты, параметры которых (в силу факторов, присущих производству) имеют отличные от номинальных значения. На этапе аппроксимации заданные характеристики заменяются физически реализуемыми функциями, а на этапе реализации определяются структуры (топологии) и параметры номинальных элементов, соответствующие найденной функции цепи. Так как одной и той же функции цепи может соответствовать несколько различных эквивалентных цепей, отличающихся друг от друга топологией и параметрами элементов, то в конечном итоге выбор конкретной реализации основывается, как правило, на структурном синтезе с учетом конкретных дополнительных требований, которым должна удовлетворять окончательная схема проектируемой цепи.

Требования к проектируемой цепи формируются либо во временной  $t$  либо в частотной  $\omega$  областях. Они удовлетворяются путем соответствующего выбора элементов цепи  $x_i$  на основе анализа допусков в пространстве параметров цепи.

Связь между пространством параметров цепи, анализом и оптимизацией допусков для соответствующего класса цепей, и в том числе с регулируемыми (управляемыми) параметрами, может осуществляться с помощью функции чувствительности  $S_i$  для некоторой функции цепи  $y(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Она определяется в виде частной производной

$$S_i = \partial y / \partial x_i = S_i(y, x_i) \quad (1)$$

от этой функции по параметру цепи  $x_i$ .

Представив изменение (вариацию) функции цепи нескольких переменных в окрестности номинальных параметров в виде разложения в ряд Тейлора и произведя ее линеаризацию (т.е. пре-небрегая частными производными второго и более высоких порядков), приращение функции можно получить в виде суммы частных отклонений характеристики цепи  $\Delta y_i = S_i(y, x_i) \Delta x_i$ :

$$\Delta y = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^N S_i(y, x_i) \cdot \Delta x_i, \quad (2)$$

где  $\Delta x_i$  – абсолютное отклонение элемента цепи,  $\Delta y$  – полное отклонение функции.

Кроме выражения (1) используют относительную логарифмическую (классическую) чувствительность

$$S_i^r(y, x_i) = \partial \ln y / \partial \ln x_i = S_i(y, x_i) \cdot x_i / y. \quad (3)$$

В этом случае относительное отклонение (приращение) функции цепи равно

$$\Delta y / y = \sum_{i=1}^N S_i^r(y, x_i) \cdot \Delta x_i / x_i, \quad (4)$$

Реже используют функции полуотносительной логарифмической чувствительности

$$Q_i = \partial \ln y / \partial x_i = S_i(y, x_i) \ln y / y = Q_i^r(y, x_i)$$

$$Q_i^r = \partial y / d \ln x_i = S_i(y, x_i) x_i = Q_i^r(y, x_i)$$

**Методы анализа допусков.** Функции чувствительности позволяют установить связь между частными отклонениями функции цепи и изменениями элементов цепи. В общем случае закон сложения частных отклонений элементов цепи заранее не известен и выбирается с учетом ряда факторов и, в том числе, в зависимости от функционального назначения проектируемого устройства, степени интеграции элементов, общего количества элементов  $N$  и т.д. При малом количестве элементов  $N \leq 5$  расчет допусков производят по критерию наихудшего случая:

$$\Delta y = \varepsilon = \sum_{i=1}^N |S_i| |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^N |S_i| d_i,$$

где  $\varepsilon$  – предельно возможное отклонение функции цепи (допуск);  $d_i$  – максимальное приращение значения элемента цепи. Этот критерий адекватен решаемой задаче в случае детерминированных отклонений элементов цепи и предполагает, что изменение всех элементов лишь увеличивает полное отклонение функции цепи.

При большом количестве элементов ( $N \geq 5$ ) производят статистический расчет. В этом случае изменения элементов представляют в виде случайной величины. При этом и отклонение функции цепи является также случайной величиной.

Частные отклонения в этом случае рассматривают как случайные переменные, и допускается фиксированная вероятность отказов, т.е. отбраковки элементов по условию:

$$|\Delta y| = \left| \sum_{i=1}^N S_i \Delta x_i \right| > \varepsilon.$$

Для определения вероятности  $p(|\Delta| > \varepsilon)$  отказов вводят случайную переменную и исследуют основные ее свойства и законы сложения. Обычно при расчетах принимают равномерное либо нормальное распределение.

На практике может применяться также смешанный метод расчета допусков. При этом элементы цепи разбивают на три группы. В первую группу вводят элементы, не влияющие на отклонения функции цепи (частные отклонения близки к нулю), во вторую – элементы, параметры которых изменяются детерминировано (частные отклонения для них складываются в соответствии с критерием наихудшего случая). В третью группу включают элементы с разбросом параметров около номинальных значений (их частные отклонения складывают статистически).

На практике широко применяют способ анализа функций цепи с помощью ЭВМ. При этом варьируют дисперсии элементов цепи и определяют вероятности отказов цепи, а по допустимой вероятности отказов находятся допустимые дисперсии элементов цепи.

Следует различать прямые и косвенные отклонения функции цепи. Прямые отклонения вычисляются непосредственно по (2), а косвенные – с помощью дополнительных приемов (опосредованно).

**Функции чувствительности объекта.** При синтезе систем автоматического управления в качестве исходной, как правило, выступает передаточная функция (ПФ) объекта управления  $W(p)=M(p)/Q(p)$ , которая определяется для нулевых начальных условий  $t_0=0$ . Если рассматривать ее как изображение (по Лапласу), то соответствующий ей оригинал является весовой функцией  $w(t)$ , которая является решением однородного дифференциального (ДУ) уравнения с постоянными коэффициентами.

При разложении  $W(p)$  на простые дроби весовую функцию  $w(t)$  можно представить в виде взвешенной суммы экспоненциальных функций, в показателе степени которых находятся корни характеристического полинома знаменателя ПФ. При этом каждое слагаемое этой суммы является обратным преобразованием по Лапласу (оригиналом) для соответствующего сомножителя ПФ.

Если коэффициенты соответствующего ДУ рассматривать в качестве параметров, то получаем однопараметрическое семейство весовых функций при нулевых начальных условиях  $t_0=const$ .

При наличии управления в системе (например, для одноконтурной САУ) уравнения движения обычно задают в виде  $\sigma = W(p) \cdot x$ ,  $x = f(\sigma, t)$ , где  $W(p)$  – передаточная функция линейной части системы,  $f(\sigma, t)$  – нелинейная функция управления. Следовательно, уравнение движения можно представить в виде  $\sigma \cdot Q(p) = M(p) \cdot f(\sigma, t)$ , т.е. функция управления зависит от двух параметров, и для нахождения решения ДУ она должна быть достаточно гладкой, т.е. иметь конечные производные по обоим аргументам.

Если коэффициенты ПФ и функции управления зависят от параметра  $\alpha$ , то необходимо рассматривать зависимости  $W(p, \alpha)$  и  $f(\sigma, t, \alpha)$ .

В общем случае на практике преимущественно рассматривают системы [3], которые описываются дифференциальными уравнениями в форме Коши:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \dots, x_n, t, \alpha), k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где  $x_k$  – пространство переменных (фазовые коэффициенты) системы,  $f_k$  – нелинейные функции,  $\alpha$  – параметр, который может принимать различные (физические) значения и отражать, как собственные свойства системы, так и внешние возмущения в допустимом интервале его изменения  $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$ .

Введя в рассмотрение векторы, характеризующие пространства переменных состояния и управления,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ , системы (5) представляют в виде  $dX/dt = F(X, t, \alpha)$ . При этом предполагают, что для выполнения требования существования и единственности решения при всех допустимых значениях параметра  $\alpha$  в пространстве  $n+1$  переменных  $x_1, \dots, x_n, t$  существует некоторая область  $H$ , когда для начальных условий

$$[t_0, X(t_0)] = X_0 \in H \quad (6)$$

существует единственное решение системы (5) в виде

$$X(t, \alpha) = X[t, X_0, t_0, \alpha].$$

Выбирая фиксированные начальные условия (6) и значение параметра  $\alpha$  из области допусти-

мых значений, получаем однопараметрическое семейство (множество) решений в виде:

$$X(t, \alpha) = X[t, X_0(\alpha), t_0(\alpha), \alpha].$$

Оно адекватно для достаточно большого круга практических задач и определяется начальными условиями и зависимостью их от параметра  $\alpha$ .

Это семейство решений характеризуются функциями чувствительности  $dx_k(t, \alpha)/d\alpha$ , т. е. частными производными от параметров  $\alpha$ , которые являются компонентами (составляющими) вектора чувствительности

$$S(t, \alpha) = dX(t, \alpha)/d\alpha.$$

Учитывая, что вектор решений  $X(t, \alpha)$  является сложной функцией от параметра  $\alpha$ , вектор чувствительности представляют в виде:

$$S(t, \alpha) = \frac{dX}{dX_0} \cdot \frac{dX_0}{d\alpha} + \frac{dX}{dt_0} \cdot \frac{dt_0}{d\alpha} + \frac{dX}{d\alpha}.$$

Различные способы вычисления вектора чувствительности рассмотрены в [3].

Аналогично можно ввести понятие уравнений чувствительности высших порядков

$$S_{\alpha}^{(i)} = d^i X(t, \alpha)/d\alpha^i.$$

Они могут быть получены на основании уравнений чувствительности низших порядков (при выполнении соответствующих условий дифференцируемости).

Если предположить, что вектор  $X(t, \alpha)$  имеет производные по параметру  $\alpha$  до  $(S+1)$ -го порядка включительно, то для фиксированного допустимого значения параметра  $\alpha_0$  получим разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} X(t, \alpha_0) &= \\ &= X(t, \alpha_0) + \frac{dX(t, \alpha_0)}{d\alpha} (\alpha - \alpha_0) + \dots + \rho_{s+1} \end{aligned}$$

где  $\rho_{s+1}$  – остаточный член ряда, имеющий порядок  $S+1$  относительно разности  $\alpha - \alpha_0$ . Отсюда следует, что производные в третьем и последующих слагаемых представляют собой чувствительности соответствующего порядка. Они являются градиентами по параметру  $\alpha$  рассматриваемого однопараметрического семейства решений.

При синтезе систем автоматического управления (САУ) характерной является задача построения линейной стационарной системы по желаемой ПФ системы  $W(p)$  при заданной ПФ объекта  $W_o(p)$ . Эта задача, как правило, сводится к нахождению ПФ регулятора (корректирующего устройства)  $W_k(p)$ . Такая задача имеет неоднозначное решение, т.к. физически реализуемая ПФ  $W_k(p)$  может быть построена с помощью цепей различной структуры, и в том числе, с охватом части (или всей) прямой передачи обратной связи с ПФ  $W_{oc}(p)$ . Известно, что для минимизации чувствительности ПФ объекта  $W_o(p)$  пред-

почтительно выбирать топологию системы с цепью обратной, которая должна охватывать хотя бы сам объект управления, который наиболее подвержен возмущениям параметров и внешней среды. Решение этой задачи с привлечением функций чувствительности может осуществляться путем выбора такой структуры системы, при которой место включения объекта (как наименее стабильного звена) наиболее полно удовлетворяет требованиям уменьшения чувствительности выходной переменной. При этом соответствующий функционал, построенный на ее основе, может выступать в качестве показателя качества системы в целом (по отношению к вариациям параметров объекта управления).

Например, для структуры, у которой в прямой передаче последовательно включены корректирующее устройство (регулятор) и объект, а обратной связью охвачен только объект управления, ПФ системы имеет вид:

$$W(p) = W_k(p)W_o(p)/[1 + W_{oc}(p)W_o], \quad (7)$$

а функция чувствительности ПФ системы по ПФ объекта в этом случае имеет вид:

$$S_i^r(W(p), W_o(p)) = 1/[1 + W_{oc}(p)W_o(p)] \quad (8)$$

При охвате обратной связью и объекта управления, и корректирующего устройства функция чувствительности будет иметь вид:

$$\begin{aligned} S_i^r(W(p), W_o(p)) &= \\ &= 1/[1 + W_k(p)W_{oc}(p)W_o(p)]. \end{aligned}$$

При совместном решении уравнений (7) и (8), т.е. для построения ПФ системы с учетом требований по чувствительности, задача оказывается некорректной, так как количество неизвестных величин оказывается меньше количества уравнений. Для выхода из этой ситуации в систему вводят избыточность (дополнительные линейные относительно соответствующего параметра уравнения). Обычно в качестве избыточных элементов выступают параметры корректирующего устройства (коэффициент усиления, постоянные времени, элементы схем и т.д.). Вводимая избыточность может осуществляться также усложнением структуры системы.

В зависимости от класса решаемых задач кроме поэлементной чувствительности могут использоваться функции чувствительностей по другим параметрам. В качестве таковых могут выступать, например, нули ( $q_i$ ) или полюсы ( $p_i$ ) передаточных функций. В этом случае функции чувствительности представляют в виде:

$$\begin{aligned} S_i^r(T(p), q_i) &= \\ &= \partial \ln T(p) / \partial \ln q_i, S_i^r(T(p), p_i). \end{aligned}$$

Широко применяют также частотные методы. При этом используют частные функции чувствительностей по параметру  $\alpha : \partial U(\omega) / \partial \alpha$ ,

$\partial V(\omega)/\partial \alpha, \partial A(\omega)/\partial \alpha, \partial \phi(\omega)/\partial \alpha$ , т.е. производные от вещественной, мнимой, амплитудной и фазовой характеристик ПФ  $W(p)$  соответственно. Эти функции могут использоваться для косвенных оценок временных функций цепи или для непосредственной оценки качества работы системы в целом (или ее отдельных звеньев). Наиболее часто их применяют для оценки корректирующих устройств и узкополосных фильтров.

В отдельных случаях функции чувствительности используют также для оценки некоторых параметров САУ. Например, для показателя колебательности  $M = A(\omega_p)/A(0)$ , где  $A(\omega)$  – амплитудно-частотная характеристика,  $\omega_p$  – резонансная частота замкнутой системы, функция чувствительности [3] показателя колебательности имеет вид:

$$S_i = \frac{\partial M}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[ \frac{A(\omega_p)}{A(0)} \right] + \frac{\partial}{\partial \omega_p} \left[ \frac{A(\omega_p)}{A(0)} \right] \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_i}$$

Второе слагаемое в правой части учитывает, что  $\omega_p$  является также функцией параметров объекта.

**Инварианты чувствительности.** Инвариантные свойства чувствительности, т.е. соответствующие соотношения, связывающие функции чувствительности по различным параметрам типовых функций цепей, представлены в нескольких монографиях [1-3]. Рассмотрим некоторые из них.

Представим функцию импеданса (проводимости) пассивной RLC-цепи произвольной сложности в виде

$$Z = Z(R_1, \dots, R_{NR}, L_1, \dots, L_{NL}, C_1, \dots, C_{NC}, p), \quad (9)$$

где  $N_R$  – количество резисторов,  $N_L$  – количество индуктивностей,  $N_C$  – количество емкостей,  $N = N_R + N_L + N_C$  – общее количество элементов цепи,  $p = \sigma + j\omega$  – комплексная переменная.

В качестве одного из инвариантов суммы чувствительностей для импеданса (9) может выступать [1] выражение:

$$\sum_{i=1}^{N_R} S_i^r(z, x_i) = \sum_{i=1}^{NR} S_i^r(z, R_i) + \sum_{i=1}^{NL} S_i^r(z, L_i) - \sum_{i=1}^{NC} S_i^r(z, C_i) = 1,$$

т.е. сумма относительных чувствительностей импеданса RLC-цепи произвольной сложности (относительно элементов цепи) равна единице. Соотношение для функции проводимости RLC-цепи имеет аналогичный вид.

Для передаточной функции  $T(p) = U_2(p)/U_1(p)$  произвольной RLC-цепи инвариантность суммы поэлементных относительных чувствительностей выражается следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_R} S_i^r(T(p), R_i) + \sum_{i=1}^{N_L} S_i^r(T(p), L_i) \\ & - \sum_{i=1}^{N_C} S_i^r(T(p), C_i) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_L} S_i^r(T(p), L_i) + \sum_{i=1}^{N_C} S_i^r(T(p), C_i) = \\ & = S^r(T(p), p) \end{aligned} \quad (11)$$

Произведя преобразования выражения (11), получим новые формы инвариантности чувствительности. Раскроем выражение в правой части выражения (11).

$$\begin{aligned} S_i^r(T(p), p) &= \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} = \frac{\partial \ln |T| \exp(jb)}{\partial \ln p} = \\ &= \frac{p \partial \ln |T|}{\partial p} + \frac{p \partial \ln \exp(ib)}{\partial p} = \\ &= p \left( \frac{\partial \ln |T|}{\partial p} + j \frac{\partial b}{\partial p} \right) \Big|_{p=j\omega} = \\ &= \omega \left( \frac{\partial a(\omega)}{\partial \omega} + j \frac{\partial b(\omega)}{\partial \omega} \right) = \omega(a'(\omega) + j\tau(\omega)), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\ln |T| = \alpha(\omega)$  – затухание цепи,  $b(\omega)$  – фазовая характеристика,  $a'(\omega)$  – крутизна характеристики затухания,  $\tau$  – групповое время запаздывания.

Левую часть уравнения (11) представим в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_L} \frac{\partial \ln |T|}{\partial \ln L_i} + \sum_{i=1}^{N_C} \frac{\partial \ln |T|}{\partial \ln C_i} + \\ & + j \left( \sum_{i=1}^{N_L} L_i \frac{\partial b(\omega)}{\partial L_i} + \sum_{i=1}^{N_C} C_i \frac{\partial b(\omega)}{\partial C_i} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Сгруппируем слагаемые соответствующим образом и получим следующие соотношения, характеризующие инвариантность чувствительности в виде:

$$\sum_{i=1}^{N_D} \frac{\partial \ln |T|}{\partial \ln D_i} = \omega a'(\omega), \quad \sum_{i=1}^{N_D} D_i \frac{\partial b(\omega)}{\partial D_i} = \omega \tau(\omega), \quad (14)$$

где  $D_i = \{L_i C_i\}$ ,  $N_D$  – количество индуктивностей или ёмкостей.

Для пассивных RC-цепей, как для частного случая, в выражении (14) принято:

$$D_i = C_i, N_D = N_C.$$

Полученные выражения (12 - 14) показывают, что суммарная относительная поэлементная чувствительность передаточной функции является функцией частоты и определяется крутизной характеристикой затухания и фазы.

Заметим, что при расчете эквивалентных четырехполюсников функции затухания  $\alpha(\omega)$  и фазы ( $\omega$ ) не могут меняться в ходе итераций. Следовательно, полученные соотношения инвариантны, т.е. неизменны для выбранной функции цепи и справедливы для достаточно обширного класса пассивных электрических цепей.

Следует иметь в виду, что указанные выше соотношения можно распространить на активные цепи, однако при этом суммирование следует производить также для параметров управляемых источников.

Перейдем к оценке модулей функций чувствительности. Можно показать, что

$$\sum_{i=1}^{N_L} \left| S_i^r (|T|, L_i) \right| + \sum_{i=1}^{N_C} \left| S_i^r (|T|, C_i) \right| \geq \omega |a'(\omega)|$$

$$\sum_{i=1}^{N_L} \frac{\partial b(\omega)}{\partial \ln L_i} + \sum_{i=1}^{N_C} \frac{\partial b(\omega)}{\partial \ln C_i} = \sum_{i=1}^{N_L} Q_i^r(b(\omega), L_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_C} Q_i^r(b(\omega), C_i) = \omega \tau(\omega).$$

Отсюда следует, что модуль крутизны характеристики затухания  $RLC$ -цепи является нижней потенциальной границей, к которой может стремиться (сверху) суммы модулей логарифмических относительных поэлементных чувствительностей модуля передаточной функции по реактивным элементам цепи.

В заключение заметим, что аппарат чувствительности достаточно многогранен. Он может способствовать решению широкого круга задач, связанных с анализом влияния малых изменений конструктивных параметров и внешних условий работы на динамику систем, а также синтезу систем, мало чувствительных к изменениям этих факторов. Функции чувствительности представляют собой градиенты показателей качества систем по некоторым совокупностям параметров и характеризуют как саму систему, так и внешнюю среду.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гехер, К. Теория чувствительности и допуска электронных цепей / Пер. с англ. под ред. Ю. Л. Хотунцева. – М. : Сов. радио, 1973.
2. Мезон, С. Электронные цепи, сигналы и системы / С. Мезон, Г. Циммерман. Пер. с англ. под ред. П. А. Ионкина. – М. : ИЛ, 1963.
3. Томович, Р. Общая теория чувствительности / Р. Томович, М. Вукобратович. Пер. с англ. под ред. Я. З. Цыпкина. – М. : Сов. радио, 1972.
4. Розенвассер, Е.Н. Чувствительность систем автоматического управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов. – Л. : «Энергия», 1969.

□Авторы статьи:

Соколов  
Борис Васильевич  
- канд. техн. наук, доц. каф. электроснабжения горных и промышленных предприятий. КузГТУ.  
Тел. 8(384-2)39-63-20

Шевцова  
Татьяна Геннадьевна  
-ст. препод. каф. автоматизации производственных процессов и автоматизированных систем управления. КемТИПП.  
Тел. 8(384-2)73-41-20

**УДК 621.317.089.68**

**В.М. Ефременко, О.А. Савинкина, Р.Б. Наумкин**

## АНАЛИЗ ПОТЕРЬ НАПРЯЖЕНИЯ В РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Техническое перевооружение сельского хозяйства, внедрение высокотехнологичных процессов получения сельхозпродукции, рост обеспеченности сельского населения электробытовыми приборами требуют достаточного количества электрической энергии соответствующего качества. Одним из показателей качества электроэнергии, регламентируемых [1], является отклонение напряжения, которое не должно превышать в нормальном режиме  $\pm 5\%$  (для освещения –  $2,5\%$ ),

а в послеаварийном режиме  $\pm 10\%$ . При этом следует отметить, что как положительное, так и отрицательное отклонение напряжения сверх допустимого неблагоприятно влияет на электроприемники. Так, у асинхронных двигателей (АД) при снижении напряжения снижается момент, увеличивается скольжение и снижается частота вращения, возрастает ток, что приводит к дополнительному нагреву. Срок службы АД при длительной работе при  $U = 0,9U_n$  сокращается вдвое (рис. 1).